Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 8

25.10.2022

Teorema di Noether
Tensore energia impulso
Invarianza di gauge globale
Campo scalare complesso
Quantizzazione del campo di Dirac

anno accademico 2022-2023

Teorema di Noether

$$\partial_\mu \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_n\right)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \varepsilon^k} = 0 \quad k = 1, M$$

- Possiamo pertanto definire le M correnti conservate

$$\boxed{j^{k,\mu} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_n\right)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \varepsilon^k} \quad k = 1, M \qquad \partial_\mu j^{k,\mu} = 0}$$

- La natura dell'indice k dipende dal tipo di trasformazione
  - Può essere un indice di Lorentz
    - In questo caso la corrente è un tensore
  - Può essere un indice che individua un grado di libertà interno
    - Un esempio è l'isospin

- Illustriamo i concedetti introdotti con due esempi
  - Un esempio di simmetria dello spazio tempo
    - Le traslazioni
  - Un esempio di simmetria interna
    - Una trasformazione di gauge

Tensore energia impulso

- Come prima applicazione del teorema di Noether consideriamo l'invarianza della Lagrangiana per traslazioni nello spazio tempo per il campo di Klein-Gordon

$$\boxed{\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\left[\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi\phi\right]}$$

  - Le traslazioni sono elementi del gruppo di Poincaré
  - Si tratta di trasformazioni dello spazio tempo
- Una traslazione e definita come

$$T_a : \; x \to x + a \qquad \text{per le componenti} \qquad x^\nu \to x^\nu + a^\nu$$

  - Trasformazioni differenziabili
  - Dipendono dai 4 parametri a^ν
- Per una traslazione infinitesima δa (δa^ν piccoli) i campi hanno una variazione

$$\delta\phi(x) = \phi(x+\delta a) - \phi(x) \approx \phi(x) + \partial_\nu\phi\delta a^\nu - \phi(x) = \delta a^\nu\partial_\nu\phi \qquad \frac{\delta\phi}{\delta a^\nu} = \partial_\nu\phi$$

  - La corrente di Noether è pertanto $j_{\mu\nu} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\dfrac{\delta\phi}{\delta a^\nu}$ $\qquad j_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$
  - Nella diapositiva 192 abbiamo visto che $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\sum_n \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)}\delta\phi_n$
    - Attenzione $\delta\mathcal{L}$ non è nulla !
    - In definitiva $\boxed{\delta\mathcal{L} = \partial^\mu j_{\mu\nu}\delta a^\nu}$ $\qquad \boxed{\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta a^\nu} = \partial^\mu j_{\mu\nu} = \partial^\mu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}$

Tensore energia impulso

- Infatti la lagrangiana è implicitamente una funzione della posizione
  - La variazione indotta dalla traslazione è

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\big(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\big) \qquad \delta\mathcal{L} = \delta a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = g_{\mu\nu}\partial^\mu \delta a^\nu \mathcal{L}\big(x\big)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^\nu} = \partial^\mu g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)}$$

- Uguagliando con l'analoga espressione trovata per la variazione dei campi (vedi diapositiva precedente)

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \partial^\mu g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)$$

  - Definiamo il tensore Energia-Impulso per il campo di Klein Gordon

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)}$$

- La conservazione della corrente è

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

  - Le "cariche" conservate sono le componenti del 4-momento

$$P_\nu = \int T_{0\nu} d^3\mathbf{r}$$

- In particolare l'Hamiltoniana

$$H \equiv P_0 = \int T_{00} d^3\mathbf{r} \qquad \mathcal{H} = T_{00} = \partial_0\phi\partial_0\phi - g_{00}\mathcal{L}(x) \qquad \boxed{\mathcal{H} = \dot{\phi}\dot{\phi} - \mathcal{L}(x)}$$

Tensore energia impulso

- **Analizziamo anche le componenti ν=1,3 del 4-momento**

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)}$$

$$P^\nu = \int T_0^{\ \nu} d^3\mathbf{r} = \int \partial_0\hat{\phi}\partial^\nu\hat{\phi}\, d^3\mathbf{r} = -\int \dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi}\, d^3\mathbf{r}$$

  - **Anche nel caso di P, come per H, alla fine avremo bisogno di eliminare un contributo infinito**
    - **Oppure adottiamo l'ordinamento normale**

$$\hat{\mathbf{P}} = -\int :\dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi}\, d^3\mathbf{r}:$$

- **Sviluppiamo l'espressione**

$$\hat{\mathbf{P}} = -\int :\dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi}: d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\int :\dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi} + \dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi}: d^3\mathbf{r}$$

  - **Osserviamo che** $\dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi} = \cancel{\nabla\left(\dot{\hat{\phi}}\hat{\phi}\right)} - \left(\nabla\dot{\hat{\phi}}\right)\hat{\phi}$ $\quad\int \partial_i\left(\dot{\hat{\phi}}\hat{\phi}\right)d^3\mathbf{r} = \int dx_j dx_k \int_{-\infty}^{+\infty}\partial_i\left(\dot{\hat{\phi}}\hat{\phi}\right)dx_i \to 0$
  - **Inoltre** $:\left(\nabla\dot{\hat{\phi}}\right)\hat{\phi}: = :\hat{\phi}\left(\nabla\dot{\hat{\phi}}\right):$
    - **Ovviamente le due espressioni conducono a risultati uguali solo se si applicano gli operatori al vuoto |0>**
  - **Otteniamo**

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\int :\dot{\hat{\phi}}\nabla\hat{\phi} - \hat{\phi}\nabla\dot{\hat{\phi}}: d^3\mathbf{r}$$

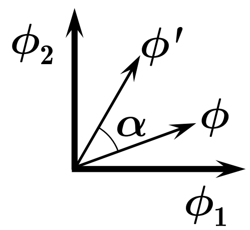
  - **A questo punto si sostituiscono le rappresentazioni del campo e si trova, come per l'Hamiltoniana**

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathbf{p}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}}$$

Il campo scalare complesso

- Il campo di Klein-Gordon che abbiamo fino ad ora studiato ha un solo grado di libertà
  - Si utilizza per descrivere particelle neutre senza spin: bosoni neutri
    - Particelle che coincidono con la propria antiparticella
- Per descrivere particelle cariche abbiamo bisogno di un campo complesso
  - La carica va intesa in senso ampio
    - È un numero quantico che distingue particelle e antiparticelle
    - Non è necessariamente la carica elettrica
- Consideriamo due particelle di Klein-Gordon con la stessa massa
  - La Lagrangiana di questo sistema è

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\widehat{\phi}_1\partial^\mu\widehat{\phi}_1 - \frac{1}{2}m^2\widehat{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\widehat{\phi}_2\partial^\mu\widehat{\phi}_2 - \frac{1}{2}m^2\widehat{\phi}_2^2$$



- I campi ϕ_1 e ϕ_2 sono due gradi di libertà di un sistema che ha bisogno di due componenti in uno spazio astratto
  - Studiamo gli effetti dell'invarianza rispetto a rotazioni in questo spazio

$$\widehat{\phi}_1' = \widehat{\phi}_1\cos\alpha - \widehat{\phi}_2\sin\alpha$$

$$\widehat{\phi}_2' = \widehat{\phi}_1\sin\alpha + \widehat{\phi}_2\cos\alpha$$

  - Le trasformazioni dipendono da un parametro (gruppo $\mathrm{SO}[2]$)

Il campo scalare complesso

- Consideriamo una rotazione infinitesima: $\alpha \to \delta\alpha$ $\quad \cos\delta\alpha \approx 1 \quad \sin\delta\alpha \approx \delta\alpha$
  - La trasformazione dei campi diventa
  - Pertanto le variazioni dei due campi sono

$$\widehat{\phi}_1' = \widehat{\phi}_1 - \widehat{\phi}_2\delta\alpha \qquad \delta\widehat{\phi}_1 = \widehat{\phi}_1' - \widehat{\phi}_1 = -\widehat{\phi}_2\delta\alpha \qquad \frac{\delta\widehat{\phi}_1}{\delta\alpha} = -\widehat{\phi}_2$$

$$\widehat{\phi}_2' = \widehat{\phi}_1\delta\alpha + \widehat{\phi}_2 \qquad \delta\widehat{\phi}_2 = \widehat{\phi}_2' - \widehat{\phi}_2 = \widehat{\phi}_1\delta\alpha \qquad \frac{\delta\widehat{\phi}_2}{\delta\alpha} = \widehat{\phi}_1$$

- Si tratta di una simmetria interna con un solo parametro
  - La corrente di Noether è

$$\widehat{N}_\phi^\mu = \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}_n\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}_n}{\delta\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}_1\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}_1}{\delta\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}_2\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}_2}{\delta\alpha}$$

$$= \left(\partial^\mu\widehat{\phi}_1\right)\left(-\widehat{\phi}_2\right) + \left(\partial^\mu\widehat{\phi}_2\right)\widehat{\phi}_1$$

$$\boxed{\widehat{N}_\phi^\mu = \left(\partial^\mu\widehat{\phi}_2\right)\widehat{\phi}_1 - \left(\partial^\mu\widehat{\phi}_1\right)\widehat{\phi}_2}$$

- La carica conservata è

$$\widehat{Q} = \int N_\phi^0 d^3\mathbf{r} = \int \left(\dot{\widehat{\phi}}_2\widehat{\phi}_1 - \dot{\widehat{\phi}}_1\widehat{\phi}_2\right) d^3\mathbf{r}$$

confrontare con la corrente dell'equazione di Klein-Gordon

Il campo scalare complesso

- Un modo più sintetico di svolgere i calcoli si ha introducendo un campo complesso ϕ

$$\widehat{\phi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\phi}_1 - i\widehat{\phi}_2\right) \qquad \widehat{\phi}^\dagger = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\phi}_1 + i\widehat{\phi}_2\right)$$

- Ricordando lo sviluppo di un campo scalare reale

$$\widehat{\phi}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}}\left[\widehat{a}_{n\mathbf{k}}e^{-ik\cdot x} + \widehat{a}^\dagger_{n\mathbf{k}}e^{+ik\cdot x}\right]$$

  - Troviamo il seguente sviluppo per il campo complesso

$$\widehat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}}\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik\cdot x} + \widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{+ik\cdot x}\right]$$

  - Gli operatori a e $b^\dagger$ sono adesso indipendenti

$$\widehat{a}_{\mathbf{k}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{a}_{1\mathbf{k}} - i\widehat{a}_{2\mathbf{k}}) \qquad \widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger_{1\mathbf{k}} - i\hat{a}^\dagger_{2\mathbf{k}})$$

  - Si può verificare che gli operatori di creazione e distruzione introdotti hanno le seguenti regole di commutazione

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}, \widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] = (2\pi)^3\,\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right) \qquad \left[\widehat{b}_{\mathbf{k}}, \widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] = (2\pi)^3\,\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)$$

  - Tutte le altre regole di commutazione sono nulle

Il campo scalare complesso

- Si può verificare facilmente che nel piano complesso la trasformazione che abbiamo introdotto precedentemente diventa

$$\widehat{\phi}' = e^{-i\alpha}\widehat{\phi} \qquad \widehat{\phi}' = (1 - i\delta\alpha)\widehat{\phi} \qquad \delta\widehat{\phi} = -i\delta\alpha\widehat{\phi} \qquad \delta\widehat{\phi}^\dagger = i\delta\alpha\widehat{\phi}^\dagger$$

  - La trasformazione in oggetto prende il nome di trasformazione di fase (gruppo $U[1]$) o trasformazione di gauge globale (la fase non dipende da x)
- La Lagrangiana per il campo complesso è $\mathcal{L} = \partial_\mu\widehat{\phi}^\dagger\partial^\mu\widehat{\phi} - m^2\widehat{\phi}^\dagger\widehat{\phi}$
- Ripetiamo il calcolo precedente utilizzando il campo complesso
  - La corrente di Noether

$$\widehat{N}_\phi^\mu = \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}_n\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}_n}{\delta\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}^\dagger\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}^\dagger}{\delta\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\phi}\right)}\frac{\delta\widehat{\phi}}{\delta\alpha}$$

$$= (\partial^\mu\phi)\left(i\widehat{\phi}^\dagger\right) + \left(\partial^\mu\widehat{\phi}^\dagger\right)\left(-i\widehat{\phi}\right) \qquad \widehat{N}_\phi^\mu = i\left[(\partial^\mu\phi)\widehat{\phi}^\dagger - \left(\partial^\mu\widehat{\phi}^\dagger\right)\widehat{\phi}\right]$$

  - La carica conservata è

confrontare con la corrente dell'equazione di Klein-Gordon

$$\boxed{\widehat{Q} = \int \widehat{N}_\phi^0 d^3\mathbf{r} = i\int \left[\dot{\widehat{\phi}}\widehat{\phi}^\dagger - \dot{\widehat{\phi}}^\dagger\widehat{\phi}\right]d^3\mathbf{r}}$$

Il campo scalare complesso

- Utilizzando le espansioni integrali si possono calcolare
  - L'Hamiltoniana
$$\widehat{H} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}} + \widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{b}_{\mathbf{k}}\right]\omega$$
  - L'operatore Carica
$$\widehat{Q} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}} - \widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{b}_{\mathbf{k}}\right]$$
- In entrambi i calcoli si sono trascurati i termini che danno contributo infinito (equivalente a imporre prodotti normali)
  - Entrambi gli operatori (H e Q) si possono esprimere in funzione di due operatori numero relativi a due differenti tipi di quanti
$$\widehat{n}_{\mathbf{k}}^+ = \widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{a}_{\mathbf{k}} \qquad \widehat{n}_{\mathbf{k}}^- = \widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \widehat{b}_{\mathbf{k}}$$
- Entrambi gli operatori numero (n^+ e n^-) hanno autovalori non negativi
- L'Hamiltoniana contiene la somma di questi operatori
  - L'Hamiltoniana è definita positiva
  - Si è eliminato il problema delle energie negative
- L'operatore Carica è la differenza dei due operatori
  - I due quanti contribuiscono con segno opposto alla carica
  - Hanno carica opposta (sono uno antiparticella dell'altro)

Il campo scalare complesso

- Analizziamo un po' meglio l'effetto degli operatori a e b
  - Per un generico operatore di creazione o distruzione $o_{\mathbf{p}}$

$$\left[\widehat{Q},\widehat{o}_{\mathbf{p}}\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{o}_{\mathbf{p}}\right]$$

  - Per i vari operatori di creazione e distruzione si ha

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]=\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}},\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]=\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}},\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]+\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger,\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]\widehat{a}_{\mathbf{k}}=-\left[\widehat{a}_{\mathbf{p}},\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\right]\widehat{a}_{\mathbf{k}}=-(2\pi)^3\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\widehat{a}_{\mathbf{k}}$$

  - Pertanto

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]=-(2\pi)^3\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\widehat{a}_{\mathbf{k}}$$

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{b}_{\mathbf{p}}\right]=(2\pi)^3\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\widehat{b}_{\mathbf{p}}$$

  - E analogamente …

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\right]=(2\pi)^3\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\widehat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$\left[\widehat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{a}_{\mathbf{k}}-\widehat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\widehat{b}_{\mathbf{k}},\widehat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger\right]=-(2\pi)^3\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\widehat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$$

- Inserendo nella relazione di partenza

$$\left[\widehat{Q},\widehat{a}_{\mathbf{p}}\right]=-\widehat{a}_{\mathbf{p}}\qquad\left[\widehat{Q},\widehat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\right]=\widehat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger\qquad\left[\widehat{Q},\widehat{b}_{\mathbf{p}}\right]=\widehat{b}_{\mathbf{p}}\qquad\left[\widehat{Q},\widehat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger\right]=-\widehat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$$

  - Gli operatori a e $b^\dagger$ diminuiscono di 1 la carica
    - L'operatore a distrugge una particella, l'operatore $b^\dagger$ crea un'antiparticella
  - Gli operatori $a^\dagger$ e b aumentano di 1 la carica
    - L'operatore $a^\dagger$ crea una particella, l'operatore b distrugge un'antiparticella

Il campo scalare complesso

- Gli stati del campo complesso si costruiscono come nel caso del campo reale
  - Adesso però ci sono due tipi di particelle indipendenti
    - Particelle "Positive" $\quad |\mathbf{p},+\rangle = \widehat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle$
    - Particelle "Negative" $\quad |\mathbf{p},-\rangle = \widehat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle$
- Analogamente si costruiscono stati con un numero arbitrario di quanti dei due tipi
- Data la forma degli operatori Q e H è immediato verificare che l'operatore Q è conservato

$$\boxed{\dot{\widehat{Q}} = \left[\widehat{Q},\widehat{H}\right] = 0}$$

  - In assenza di interazioni si può facilmente verificare che il numero di antiparticelle e il numero di particelle si conservano separatamente
- Si può inoltre verificare che per i campi ϕ e $\phi^{\dagger}$ valgono regole di commutazione con Q simili a quelle degli operatori di creazione e distruzione

$$\left[\widehat{Q},\phi\right] = -\widehat{\phi} \qquad \left[\widehat{Q},\phi^{\dagger}\right] = \widehat{\phi}^{\dagger}$$

  - Definiamo (tramite sviluppo in serie) l'operatore $\boxed{\widehat{U}(\alpha) = e^{i\alpha\widehat{Q}}}$
  - Si può dimostrare che

$$\boxed{\widehat{U}(\alpha)\widehat{\phi}\widehat{U}^{-1}(\alpha) = e^{i\alpha}\widehat{\phi}}$$

Quantizzazione del Campo di Dirac

- La quantizzazione del campo di Dirac ψ si effettua in modo del tutto analogo alla quantizzazione del campo di Klein-Gordon
  - Seguendo il nostro approccio per il campo di KG
    - Si sviluppa il campo nei modi normali
    - Si promuovono i coefficienti dello sviluppo a operatori
    - Si impongono le regole di commutazione
  - Alternativamente si può seguire il metodo canonico
    - Si scrive la Lagrangiana del campo di Dirac
    - Si individuano i momenti coniugati ai campi
    - Si impongo le relazioni di commutazioni fra campi e momenti coniugati
- Anticipiamo che la differenza fondamentale sta nel fatto che nelle regole di commutazione ai commutatori $[A,B]$ si sostituiscono gli anticommutatori $\{A,B\}$
  - La necessità degli anticommutatori può essere motivata alternativamente
    - Dal principio di esclusione di Pauli che richiede l'antisimmetria degli stati fermionici costruiti con gli operatori di creazione e distruzione
    - Dalla necessità che l'Hamiltoniana sia definita positiva
- Entrambe le impostazioni derivano da motivazioni fisiche
  - Vale la pena approfondire entrambi gli aspetti

Lagrangiana del campo di Dirac

- **La Lagrangiana del campo di Dirac è**
  - **Notiamo che non contiene i campi $\partial_\mu \psi^\dagger$**

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\psi,\psi^\dagger,\partial_\mu\psi\right) = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi}$$

- **L'equazione di Dirac segue semplicemente applicando le equazioni di Eulero Lagrange ai campi ψ e $\psi^\dagger$**
  - **Variando i campi $\psi^\dagger$**

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_n\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n}}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi^\dagger\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} \qquad 0 = \gamma^0\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \qquad \left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi = 0$$

  - **Alternativamente, variando i campi ψ**

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \qquad \partial_\mu i\overline{\psi}\gamma^\mu = -m\overline{\psi} \qquad \overline{\psi}\left(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m\right) = 0$$

- **L'asimmetria fra ψ e $\psi^\dagger$ deriva dal fatto che più Lagrangiane sono possibili**
  - **Ad esempio** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^* = \overline{\left[\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi\right]} = \overline{\left[\overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\right)\right]} = \left(\overline{i\gamma^\mu\partial_\mu\psi} - m\overline{\psi}\right)\psi$

$$\boxed{\left(\overline{u}Av\right)^* = \overline{\left(\overline{u}Av\right)}} \qquad = \left(-i\partial_\mu\overline{\psi}\,\overline{\gamma^\mu} - m\overline{\psi}\right)\psi \qquad \boxed{\mathcal{L}_1 = -\overline{\psi}\left(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m\right)\psi}$$

- **Tuttavia si può dimostrare che le azioni corrispondenti differiscono per l'integrale di una 4-divergenza che si può rendere nullo all'infinito**
  - **Pertanto conducono alle stesse equazioni**

Hamiltoniana del campo di Dirac

- **Possiamo a questo punto calcolare i momenti coniugati di ψ**
  - **I momenti coniugati di $\psi^\dagger$ sono nulli per l'asimmetria fra ψ e $\psi^\dagger$ nella Lagrangiana**

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \psi\right)} \quad = \bar{\psi} i \gamma^0 \quad = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \quad = i\psi^\dagger$$

- **L'Hamiltoniana è pertanto**

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} \quad = i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \quad = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - \psi^\dagger \gamma^0 \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi$$

$$= -\psi^\dagger \gamma^0 \left(i \sum_{k=1,3} \gamma^k \partial_k - m \right) \psi = \psi^\dagger \left(-i\alpha \cdot \nabla + \gamma^0 m\right)\psi \qquad \boxed{\mathcal{H} = \psi^\dagger \left(-i\alpha \cdot \nabla + m\beta\right)\psi}$$

  - **Dal momento che ψ soddisfa l'equazione di Dirac** $\left(-i\alpha \cdot \nabla + m\beta\right)\psi = i\partial_0 \psi$
  - **Abbiamo una utile espressione alternativa per l'Hamiltoniana** $\mathcal{H} = \psi^\dagger i \partial_0 \psi$
- **Si potrebbe calcolare il momento del campo calcolando il tensore $T^{\mu\nu}$**
  - **Diamo i due risultati (il calcolo può essere un esercizio)**

$$\boxed{H = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger i \partial_0 \psi} \qquad \boxed{\mathbf{P} = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger \left(-i\boldsymbol{\nabla}\right)\psi}$$

Espansione del campo di Dirac

- L'espansione del campo di Dirac in onde piane si può fare allo stesso modo di quanto fatto per il campo scalare

$$\boxed{\widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left(\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik\cdot x} + \widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik\cdot x}\right)}$$

  - Conviene definire delle funzioni con ben definite proprietà di ortogonalità

$$f_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{u_{\mathbf{k},\sigma} e^{-ik\cdot x}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_\mathbf{k}}} \qquad\qquad g_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{v_{\mathbf{k},\sigma} e^{+ik\cdot x}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_\mathbf{k}}}$$

  - Si possono verificare le relazioni di ortogonalità

$$\int f^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(x) f_{\mathbf{k}'\sigma'}(x)\, d^3\mathbf{r} = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \qquad \int g^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(x) g_{\mathbf{k}'\sigma'}(x)\, d^3\mathbf{r} = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

$$\int f^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(x) g_{\mathbf{k}'\sigma'}(x)\, d^3\mathbf{r} = 0 \qquad \int g^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(x) f_{\mathbf{k}'\sigma'}(x)\, d^3\mathbf{r} = 0$$

- Il campo diventa $\displaystyle \widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$

- Utilizzando queste relazioni si può facilmente invertire l'espansione

$$\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} = \int f^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}(x)\widehat{\psi}(x)\, d^3\mathbf{r} \qquad \widehat{b}^\dagger_{\mathbf{p}\sigma} = \int g^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}(x)\widehat{\psi}(x)\, d^3\mathbf{r}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- **Possiamo adesso discutere la quantizzazione del campo di Dirac**
  - **Seguendo il nostro approccio iniziale promuoviamo le funzioni $a_{\mathbf{k}\sigma}$ e $b_{\mathbf{k}\sigma}$ a operatori in uno spazio astratto e fissiamo le regole di anti-commutazione**

$$\left\{\widehat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'\sigma'}\right\} = (2\pi)^3\,\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \qquad \left\{\widehat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}'\sigma'}\right\} = (2\pi)^3\,\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

tutte le altre nulle

- **Con questi operatori si possono costruire gli stati con n particelle nello spazio di Fock**

$$|\mathbf{k}_1\sigma_1, \ldots \mathbf{k}_n\sigma_n\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}\ldots 2E_{\mathbf{k}_n}}\, a^{\dagger}_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\ldots a^{\dagger}_{\mathbf{k}_n\sigma_n}\,|0\rangle$$

  - **Una analoga espressione si può scrivere con gli operatori $b^{\dagger}$ (antiparticelle)**
- **Le regole di anti-commutazione fra gli operatori a e b assicurano che gli stati abbiano la corretta antisimmetria rispetto alle permutazioni di due particelle**

$$\left|\mathbf{k}_1\sigma_1, \ldots, \mathbf{k}_j\sigma_j, \ldots, \mathbf{k}_k\sigma_k, \ldots, \mathbf{k}_n\sigma_n\right\rangle = \pm\left|\mathbf{k}_1\sigma_1, \ldots, \mathbf{k}_k\sigma_k, \ldots, \mathbf{k}_j\sigma_j, \ldots, \mathbf{k}_n\sigma_n\right\rangle$$

  - **Il segno è $+$ o $-$ per permutazioni pari o dispari rispettivamente**
- **Nel seguito sarà utile trattare separatamente le due componenti di un campo**

$$\widehat{\psi}(x) = \widehat{\psi}_a(x) + \widehat{\psi}_{b^{\dagger}}(x)$$

  - **La componente a energia positiva** $$\widehat{\psi}_a(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} f_{\mathbf{k}\sigma}(x)\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma}\, d^3\mathbf{k}$$
  - **La componente a energia negativa** $$\widehat{\psi}_{b^{\dagger}}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} g_{\mathbf{k}\sigma}(x)\widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma}\, d^3\mathbf{k}$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- **Calcoliamo adesso gli anticommutatori (a tempi uguali $t = t'$)**

$$\left\{\widehat{\psi}_n\left(x\right),\widehat{\psi}_m\left(x'\right)\right\} \qquad \left\{\widehat{\psi}_n^\dagger\left(x\right),\widehat{\psi}_m^\dagger\left(x'\right)\right\} \qquad \left\{\widehat{\psi}_n\left(x\right),\widehat{\psi}_m^\dagger\left(x'\right)\right\}$$

  - **Notiamo che i campi ψ hanno 4 componenti**
- **Dal momento che gli operatori a e b anti-commutano fra di loro avremo**

$$\left\{\widehat{\psi}_n\left(x\right),\overline{\widehat{\psi}}_m^\dagger\left(x'\right)\right\} = \left\{\widehat{\psi}_{an}\left(x\right),\widehat{\psi}_{am}^\dagger\left(x'\right)\right\} + \left\{\widehat{\psi}_{b^\dagger n}\left(x\right),\widehat{\psi}_{b^\dagger m}^\dagger\left(x'\right)\right\}$$

  - **Cominciamo con le componenti a energia positiva**

$$\left\{\widehat{\psi}_{an}\left(x\right),\widehat{\psi}_{am}^\dagger\left(x'\right)\right\} = \int \sum_{\sigma\sigma'} d^3\mathbf{k}\, d^3\mathbf{k}' f_{\mathbf{k}\sigma n}\left(x\right) f_{\mathbf{k}'\sigma' m}^\dagger\left(x'\right)\left\{\widehat{a}_{\mathbf{k}\sigma},\widehat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\right\}$$

$$= \left(2\pi\right)^3 \int \sum_{\sigma} d^3\mathbf{k}\, f_{\mathbf{k}\sigma n}\left(x\right) f_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger\left(x'\right)$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int d^3\mathbf{k}\, e^{+i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}\sum_\sigma u_{\mathbf{k}\sigma n} u_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger$$

$$\boxed{\left\{\widehat{a}_{\mathbf{k}\sigma},\widehat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\right\} = \left(2\pi\right)^3 \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}$$

Ricordiamo $t = t'$

  - **Analogamente per le componenti a energia negativa**

$$\left\{\widehat{\psi}_{b^\dagger n}\left(x\right),\widehat{\psi}_{b^\dagger m}^\dagger\left(x'\right)\right\} = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}\sum_\sigma v_{\mathbf{k}\sigma n} v_{\mathbf{k}\sigma m}^\dagger$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int d^3\mathbf{k}\, e^{+i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}\sum_\sigma v_{-\mathbf{k}\sigma n} v_{-\mathbf{k}\sigma m}^\dagger$$

Quantizzazione del campo di Dirac

- **Sommando i due pezzi**

$$\left\{\widehat{\psi}_n(x),\overline{\psi}^{\dagger}_m(x')\right\}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\left(\sum_\sigma u_{\mathbf{k}\sigma}u^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}+\sum_\sigma v_{-\mathbf{k}\sigma}v^{\dagger}_{-\mathbf{k}\sigma}\right)_{nm}$$

- **Oltre alle relazioni di completezza già studiate (diapositiva 81) ne esistono altre**

$$\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\sum_\sigma\left(u_{\mathbf{k}\sigma}u^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}+v_{-\mathbf{k}\sigma}v^{\dagger}_{-\mathbf{k}\sigma}\right)_{nm}=\widehat{I}_{nm}=\delta_{nm}$$

$$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

- **In conclusione otteniamo**

$$\left\{\widehat{\psi}_n(x),\overline{\psi}^{\dagger}_m(x')\right\}=\delta_{nm}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

$$\boxed{\left\{\widehat{\psi}_n(x),\overline{\psi}^{\dagger}_m(x')\right\}=\delta_{nm}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

- **Con una procedura simile si ottengono le altre relazioni**

$$\boxed{\left\{\widehat{\psi}_n(x),\overline{\psi}_m(x')\right\}=0}\qquad\boxed{\left\{\widehat{\psi}^{\dagger}_n(x),\overline{\psi}^{\dagger}_m(x')\right\}=0}$$

Hamiltoniana e regole di commutazione

- **Veniamo adesso all'espressione dell'Hamiltoniana in funzione degli operatori di creazione e distruzione**
  - **È conveniente partire dalle relazioni**

$$H = \int d^3\mathbf{r}\psi^\dagger i\partial_0\psi \qquad \widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

- **Utilizzando l'espansione di ψ otteniamo**

$$i\partial_0\widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'}\left(f_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\right) \qquad \widehat{\psi}^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} + g^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

- **Introducendo nell'Hamiltoniana**

$$H = \int d^3\mathbf{r}\psi^\dagger i\partial_0\psi = \int d^3\mathbf{r}\sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'\left(f^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} + g^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\right) E_{\mathbf{k}'}\left(f_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\right)$$

  - **Eseguiamo l'integrazione sul volume**
    - **Utilizziamo le relazioni di ortogonalità: sopravvivono solo due termini**

$$H = \int \sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'}\int d^3\mathbf{r}\left(f^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}f_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'} - g^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}g_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\right)$$

nel caso di Dirac c'è solo una derivata ∂_0

$$= \int \sum_{\sigma,\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}' E_{\mathbf{k}'}\left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\right) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}E_{\mathbf{k}}\left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

Hamiltoniana e regole di commutazione

$$H = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- Il termine relativo ai quanti a è già sotto forma di un operatore numero
- Per mettere anche il secondo termine sotto forma di operatore numero abbiamo bisogno di commutare i due operatori
  - Se usassimo una regola di commutazione (trascuriamo il termine ½, infinito)

$$\left[\widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \right] = c \rightarrow \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} = c + \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \qquad H = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

    - L'Hamiltoniana non sarebbe definita positiva
    - I quanti b contribuirebbero con energia negativa !
  - Al contrario, con una regola di anti-commutazione

$$\left\{ \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \right\} = c \rightarrow \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} = c - \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \qquad H = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left(\widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

    - Questa volta anche i quanti b contribuiscono all'energia con segno positivo
- Adottare regole di anti-commutazione è necessario per avere una Hamiltoniana definita positiva
  - Nel dettaglio del calcolo la differenza è stata introdotta dal fatto che l'equazione di Dirac è di primo ordine nel tempo

Invarianza di gauge globale

- Anche la Lagrangiana del campo di Dirac è invariante per trasformazioni di fase costante: trasformazioni di gauge globali

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \qquad \psi \to \psi' = e^{-i\alpha}\psi \qquad \psi^\dagger \to \psi'^\dagger = e^{+i\alpha}\psi^\dagger$$

  - Ovviamente se la fase è costante la Lagrangiana è invariante

$$\mathcal{L}' = \overline{\psi}'\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi' = e^{+i\alpha}\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)e^{-i\alpha}\psi = e^{+i\alpha}e^{-i\alpha}\overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi = \mathcal{L}$$

- Calcoliamo adesso la corrente che corrisponde a questa invarianza
  - Per una trasformazione infinitesima

$$\psi' = \left(1 - i\delta\alpha\right)\psi \qquad \delta\psi = -i\delta\alpha\psi \qquad \frac{\delta\psi}{\delta\alpha} = -i\psi$$

Analogamente $\dfrac{\delta\psi^\dagger}{\delta\alpha} = i\psi^\dagger$

- Ricordiamo l'espressione per la corrente di Noether

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\psi}\right)} = i\overline{\psi}\gamma^\mu}$$

$$\widehat{N}^\mu_\psi = \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\psi}_n\right)}\frac{\delta\widehat{\psi}_n}{\delta\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\psi}\right)}\frac{\delta\widehat{\psi}}{\delta\alpha} + \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\psi}^\dagger\right)}\frac{\delta\widehat{\psi}^\dagger}{\delta\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\widehat{\psi}^\dagger\right)} = 0}$$

$$\widehat{N}^\mu_\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\left(-i\psi\right) \qquad \boxed{j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

- Abbiamo ritrovato la corrente di probabilità della teoria di Dirac
  - È una corrente conservata $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$

Invarianza di gauge globale

- Calcoliamo adesso la carica conservata associata alla conservazione della corrente

$$\widehat{Q} = \int j^0 d^3\mathbf{r} = \int \overline{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\, d^3\mathbf{r} = \int \psi^\dagger(x)\psi(x)\, d^3\mathbf{r}$$

  - Le espansioni dei campi sono

$$\widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right) \qquad \widehat{\psi}^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}'\left(f^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'} + g^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}\right)$$

  - Inserendo le due espressioni nella carica

$$\widehat{Q} = \int d^3\mathbf{r}\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'}\left(f^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'} + g^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}\right)\left(f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

- Utilizzando le proprietà di ortogonalità delle funzioni f e g sopravvivono solo due termini

$$\widehat{Q} = \int d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3\mathbf{r}\left(f^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'} f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'} g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

$$\widehat{Q} = \int d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k} \sum_{\sigma\sigma'}\left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \widehat{b}_{\mathbf{k}',\sigma'}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\right) = \int d\mathbf{k} \sum_{\sigma}\left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

Invarianza di gauge globale

$$\widehat{Q} = \int d\mathbf{k} \sum_{\sigma} \left(\widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- **Vediamo che anche in questo caso per trasformare il secondo operatore in un operatore numero abbiamo bisogno di regole di commutazione**
  - **Vediamo adesso l'effetto di avere utilizzato anticommutatori**

$$\left\{ \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \right\} = c \rightarrow \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} = c - \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}, \qquad Q = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k} \left(\widehat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \widehat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},\sigma} \widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma} \right)$$

- **Con questa scelta le particelle e le antiparticelle hanno cariche opposte**

- **Nei due calcoli che abbiamo fatto (Q e H) abbiamo scartato il contributo infinito che deriva dal commutatore**
  - **Nel caso dei campi fermionici abbiamo però cambiato anche il segno degli operatori**
    - **Dobbiamo precisare la definizione del prodotto normale nel caso di campi fermionici**
  - **Il prodotto normale porta gli operatori di distruzione a destra e inserisce un segno $+$ o $-$ a seconda del numero pari o dispari di permutazioni**

$$: \widehat{a}_1 \widehat{a}^{\dagger}_2 : = -\widehat{a}^{\dagger}_2 \widehat{a}_1 \qquad : \widehat{b}_1 \widehat{a}_1 \widehat{a}^{\dagger}_2 : = \widehat{a}^{\dagger}_2 \widehat{b}_1 \widehat{a}_1$$

Invarianza di gauge globale

- L'invarianza globale di gauge della Lagrangiana di Dirac porta alla corrente conservata $\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi$ $\quad j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$
  - L'aspetto importante, conseguenza dell'invarianza di gauge, è il fatto che i campi appaiono nella forma $\boxed{\widehat{j} = \widehat{\psi}^\dagger \widehat{O} \widehat{\psi}}$
    - Banalizzando, la presenza contemporanea di un campo hermitiano coniugato e un campo normale assicura che compaia il prodotto della fase e della sua complessa coniugata il cui prodotto è 1
- Meno banale: la presenza contemporanea di un campo hermitiano coniugato e un campo "normale" assicura che la carica sia conservata
  - I campi contengono operatori di creazione e distruzione: protoni e antiprotoni

$$\widehat{\psi}^\dagger(x) = \int \sum_{\sigma'=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} + g^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

$$\widehat{\psi}(x) = \int \sum_{\sigma=\pm s} d^3\mathbf{k}\left(f_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + g_{\mathbf{k},\sigma}\widehat{b}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}\right)$$

- L'applicazione della corrente a uno stato induce una variazione di carica nulla

$$\boxed{\Delta Q = 0}$$

		p			$\overline{p}$			
$\psi^\dagger$	ψ	$\psi^\dagger$	ψ	Q_p	$\psi^\dagger$	ψ	$Q_{\overline{p}}$	Q_T
$a^\dagger$	a	+1	−1	0			0	0
$a^\dagger$	$b^\dagger$	+1		+1		+1	−1	0
b	a		−1	−1	−1		+1	0
b	$b^\dagger$			0	−1	+1	0	0