
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 7

24.10.2022

Teoria quantistica dei campi
Operatore Numero
Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano
Quantizzazione canonica

anno accademico 2022-2023

Quantizzazione di un campo scalare (reale)

- Consideriamo un campo (reale) $\phi(x)$ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

- Abbiamo visto che il campo ha una rappresentazione di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^* e^{+ik \cdot x}] \quad \omega_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

- I coefficienti $a(\mathbf{k})$ determinano completamente il campo

- Possiamo usare in modo equivalente $\phi(x)$ o $a(\mathbf{k})$ per descrivere il campo

- Abbiamo inoltre visto che i coefficienti

$$a(t) = a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

- Soddisfano l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + (\mathbf{k}^2 + m^2) a(t) = 0$$

- Possiamo pertanto interpretare il campo come formato da un insieme infinito di oscillatori ciascuno dei quali è individuato dal momento $\mathbf{k}$

- Classicamente l'energia del modo è associata all'ampiezza $a(\mathbf{k})$

- Quantisticamente l'energia del modo è quantizzata

- È un multiplo di $\omega_{\mathbf{k}}$ $\longrightarrow$ Il campo è un insieme di particelle: quanti

- Lo stato del campo è determinato dal numero di quanti $n_{\mathbf{k}}$ in ogni modo

Quantizzazione di un campo scalare (reale)

- Per quantizzare il campo pertanto interpretiamo i coefficienti a e a^* come operatori con le regole di commutazione dell'oscillatore armonico

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Le precedenti regole di commutazione sono la generalizzazione al continuo delle regole di commutazione dell'oscillatore armonico quantistico
- Uno stato del campo è determinato definendo il numero dei quanti che sono presenti in ciascun modo
- Gli stati definiscono uno spazio di Hilbert (spazio di Fock)

- Lo spazio (astratto) dei numeri di occupazione

$$|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_n}, \dots\rangle = |n_{\mathbf{k}_1}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{\mathbf{k}_n}\rangle \otimes \dots$$

- Gli operatori di creazione e distruzione permettono di costruire questi stati partendo dal vuoto

$$|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_n}, \dots\rangle = \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger n_{\mathbf{k}_1}} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger n_{\mathbf{k}_2}} \dots}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_1}!} \sqrt{n_{\mathbf{k}_2}!} \dots} |0\rangle \quad |0\rangle \equiv |0\rangle_{\mathbf{k}_1} \otimes |0\rangle_{\mathbf{k}_2} \otimes \dots \otimes$$

- Per semplicità non abbiamo incluso un fattore di normalizzazione
 - Per ogni particella di energia E_n occorre moltiplicare per un fattore $\sqrt{2E_n}$
 - Garantisce la normalizzazione relativistica della corrente

Normalizzazione degli stati

- Consideriamo uno stato con una particella

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle$$

- Verifichiamo la normalizzazione dello stato

$$\langle \mathbf{k}' | = \left(\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} |0\rangle \right)^{\dagger} = \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}} \quad \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} | 0 \rangle$$

- Espressioni di questo tipo si calcolano utilizzando le regole di commutazione per portare gli operatori di distruzione a destra

$$[a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} - a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- La loro azione sul vuoto annulla lo stato

$$a_{\mathbf{k}'} |0\rangle = 0$$

- Otteniamo pertanto

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \langle 0 | \cancel{a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') | 0 \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \langle 0 | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Simmetria degli stati

- Consideriamo adesso uno stato con due particelle

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_{k_1}} \sqrt{2E_{k_2}} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger |0\rangle$$

- Scambiamo l'ordine delle due particelle

$$|k_2, k_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_{k_2}} \sqrt{2E_{k_1}} a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger |0\rangle$$

- Ricordiamo la regola di commutazione fra due operatori di creazione

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0$$

- Possiamo pertanto scambiare l'ordine degli operatori

$$|k_2, k_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_{k_2}} \sqrt{2E_{k_1}} a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_{k_2}} \sqrt{2E_{k_1}} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger |0\rangle = |k_1, k_2\rangle$$

- Pertanto lo stato è simmetrico rispetto allo scambio di due particelle

- Si tratta di bosoni

- Vediamo che la regola di commutazione fissa la simmetria dello stato

$$a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger - a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger = 0 \rightarrow a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger = a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger$$

- Anticipiamo che per i fermioni utilizzeremo regole di anti-commutazione

$$a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger + a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger = 0 \rightarrow a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger = -a_{k_2}^\dagger a_{k_1}^\dagger$$

Operatori di campo

- Ritorniamo all'espansione del campo tramite l'integrale di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^* e^{ik \cdot x}]$$

- Se sostituiamo alle funzioni $a_{\mathbf{k}}$ gli operatori di creazione e distruzione otteniamo un operatore (limitiamoci al caso $t = 0$)

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]$$

- Qual è l'effetto di questo operatore ?

- Per studiarlo applichiamo al vuoto

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle]$$

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$$

- L'operatore di distruzione non contribuisce

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

- Poiché $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ è uno stato di singola particella con momento definito $\hat{\phi}(\mathbf{r}, 0)|0\rangle$ è una sovrapposizione di stati di singola particella di momento differente

Operatori di campo

- Abbiamo precedentemente definito uno stato con una particella di momento definito

$$|p\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$$

- Analizziamo lo stato definito tramite l'operatore di campo $\phi(r,0)|0\rangle$ calcolandone il prodotto scalare con lo stato $|p\rangle$

$$\hat{\phi}(r,0)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} e^{-ik \cdot r} \hat{a}_k^\dagger |0\rangle$$

$$\langle 0 | \hat{\phi} | p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} \sqrt{2E_p} e^{+ik \cdot r} \langle 0 | \hat{a}_k \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle$$

- Utilizzando le regole di commutazione otteniamo

$$\langle 0 | \hat{a}_k \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_k | 0 \rangle + (2\pi)^3 \delta(k - p) \langle 0 | 0 \rangle$$

- Introduciamo nell'integrale

$$\langle 0 | \hat{\phi} | p \rangle = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} \sqrt{2E_p} e^{+ik \cdot r} \delta(k - p) = e^{+ip \cdot r}$$

- L'ampiezza che uno stato in r abbia un momento p

Ricordiamo la meccanica quantistica non relativistica

- Interpretiamo il risultato dicendo che $\phi(r)$ crea uno stato di una particella in r

$$|r\rangle = \hat{\phi}(r,0)|0\rangle \quad \langle r | p \rangle = e^{ip \cdot r}$$

Operatore numero e Hamiltoniana

- Continuiamo con l'analogia con l'oscillatore armonico

- Definiamo l'operatore numero

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

- È una generalizzazione dell'operatore numero dell'oscillatore armonico
 - Adesso dipende dal momento $\mathbf{k}$ degli stati
 - C'è una infinità (continua) di stati possibili
 - L'operatore è singolare: deve essere utilizzato in un integrale

$$\hat{N}|\alpha\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k}} |\alpha\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} |\alpha\rangle$$

- Ad esempio, contiamo le particelle nello stato $|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$

$$\hat{N}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} [\cancel{\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})] |0\rangle$$

$|\mathbf{p}\rangle$ contiene 1 particella

$$= \int d^3\mathbf{k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) |0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle$$

$$\hat{N}|\mathbf{p}\rangle = 1|\mathbf{p}\rangle$$

Operatore numero e Hamiltoniana

- Utilizzando l'operatore numero si possono costruire altri operatori importanti
 - Ad esempio l'energia totale: l'operatore Hamiltoniana
- L'energia di uno stato $|k\rangle$ è

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

- Pertanto possiamo definire l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k E_k \hat{N}_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k E_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

- Questa definizione è corretta in pratica
 - Allo stesso modo si potrebbe definire l'operatore momento P
- Tuttavia non è evidente che i due operatori formino un 4-vettore
 - Inoltre operatori più complicati sono meno intuitivi
- È opportuno un approccio sistematico più potente

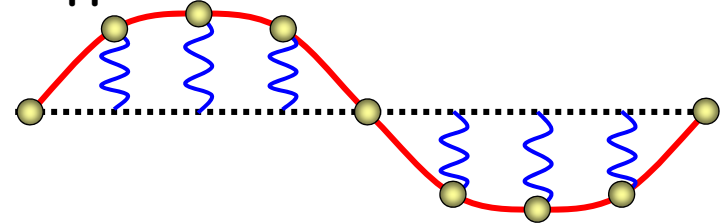
Formalismo di Lagrange - Hamilton

- È un metodo potente per discutere simmetrie e leggi di conservazione
- È un metodo potente per introdurre le interazioni

Lagrangiana di campo classico

- Supponiamo di avere N oscillatori classici accoppiati

- Ogni massa è collegata ad una molla (k)
- Le masse sono legate fra di loro da una corda senza massa che applica una tensione τ



- La Lagrangiana del sistema è

$$L = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} k q_n^2 - \frac{1}{2} \tau \Delta x \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \right]$$

- Nel passaggio ad un sistema continuo

$$\begin{aligned} m &\rightarrow \rho dx & q_r(t) &\rightarrow \phi(x, t) \\ k &\rightarrow \kappa dx & \dot{q}_r(t) &\rightarrow \dot{\phi}(x, t) \end{aligned} \quad \tau \Delta x \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \rightarrow \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad \sum_r \rightarrow \int$$

- Pertanto la Lagrangiana diventa

$$L = \int \left[\frac{1}{2} \rho \left(\dot{\phi}(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(\phi(x, t) \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$L = \int \mathcal{L} \left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx$$

- L'integrando è una Lagrangiana per unità di lunghezza
 - Densità di Lagrangiana $\mathcal{L}$



Lagrangiana di campo classico

- Anche nel caso continuo l'equazione di evoluzione del sistema si ottiene minimizzando l'azione

$$S = \int L dt = \int dt dx \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi)$$

- La condizione di minimo $\delta S = 0$ conduce alle equazioni di Eulero - Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

- Applichiamo questa equazione alla densità di Lagrangiana dell'esempio della fune

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi) = \frac{1}{2} \rho \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \kappa \phi^2 - \frac{1}{2} \tau (\partial_x \phi)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \rho \dot{\phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} = -\tau \partial_x \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\kappa \phi$$



$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\kappa \phi$$

Equazione dell'onda

Mezzo dispersivo

Interpretazione meccanica
dell'equazione di Klein-Gordon

Lagrangiana di campo classico

- Il formalismo si estende facilmente al caso 3-dimensionale

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \nabla \phi)$$

- La densità di Lagrangiana è funzione delle 4 derivate del campo e del campo stesso

- In notazione covariante $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

- Nel primo caso l'equazione di Eulero - Lagrange è

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_y \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

- Nel secondo caso, in notazione covariante

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

- La densità è adesso per unità di volume

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x \quad S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

Lagrangiana di campo classico

- Per finire, nel caso in cui il campo abbia più di una componente

- Campo di Dirac $\phi \rightarrow \psi_\sigma \quad \sigma = 1, 4$

- Campo Elettromagnetico $\phi \rightarrow A_\mu \quad \mu = 0, 3$

- Campo di Klein Gordon complesso $\phi \rightarrow \phi_1 + i\phi_2 \quad \phi_1, \phi_2 \quad \phi, \phi^*$

- In questo caso la densità di Lagrangiana dipende da tutte le componenti

$$\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k) \quad k = 1, N$$

- Vale l'equazione di Eulero - Lagrange per ciascuna componente del campo

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \quad k = 1, N$$

- Esempio: Lagrangiana per il campo di Klein Gordon complesso

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*) = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi^*$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^*$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$



Quantizzazione canonica

- Anche nel caso continuo si può utilizzare il formalismo Hamiltoniano
 - Dobbiamo trovare il momento coniugato della variabile dinamica
 - La variabile dinamica è il campo ϕ

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \longrightarrow \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

- La densità Hamiltoniana è

$$H(p, q) = p\dot{q} - L \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial_\mu \phi) = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad H = \int \mathcal{H}(\pi, \phi, \partial_\mu \phi) d^3x$$

- A questo punto si può procedere come nel caso della quantizzazione dell'oscillatore armonico unidimensionale
 - Si trasformano la variabile dinamica ϕ e il suo momento coniugato π in operatori $\phi \rightarrow \hat{\phi} \quad \pi \rightarrow \hat{\pi} \quad \longrightarrow \quad \phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad \pi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\pi}(\mathbf{r}, t)$
 - Osserviamo che si tratta di operatori dipendenti dal tempo
 - In realtà di famiglie di operatori che dipendono dal "parametro" $\mathbf{r}$
 - Si impongono regole canoniche di commutazione fra la variabile dinamica e il momento coniugato corrispondente

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i \quad \longrightarrow \quad [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Attenzione: t è lo stesso per i due operatori



Quantizzazione canonica

- Poiché $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ rappresenta una famiglia di operatori occorre fissare anche la regola di commutazione per i due operatori distinti $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ e $\hat{\phi}(\mathbf{r}', t)$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = 0$$

- Analogamente

$$[\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = 0$$

- Adesso vogliamo trovare una relazione per trovare a e $a^\dagger$ in funzione di ϕ e π

- Richiamiamo la rappresentazione del campo che abbiamo già utilizzato

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}] \quad \text{per semplificare la notazione} \quad \boxed{\omega \equiv E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}$$

$$k = (\omega, \mathbf{k})$$

- Calcoliamo il momento coniugato

$$\hat{\pi}(x) \equiv \dot{\hat{\phi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

- Consideriamo adesso l'espressione

$$p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} p^0 [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}] + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [(p^0 + \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + (p^0 - \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

Quantizzazione canonica

$$p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} \left[(p^0 + \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + (p^0 - \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x} \right]$$

- Consideriamo adesso l'integrale ($p = (p^0, \mathbf{p})$)

$$\begin{aligned} \int (p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} d^3\mathbf{r} &= \int (p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi}) \frac{e^{ip^0 t} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{2p^0}} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{4\omega p^0}} \int \left[(p^0 + \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + (p^0 - \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] e^{ip^0 t} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{4\omega p^0}} \int \left[(p^0 + \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] e^{ip^0 t} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2p^0} \left[(p^0 + \omega) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega - p^0)t} \right] (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \int \hat{a}_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \hat{a}_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

$$\int (p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} d^3\mathbf{r} = \hat{a}_{\mathbf{p}}$$

Notiamo che è
indipendente dal tempo

Quantizzazione canonica

- Analogamente si dimostra che

$$\int (p^0 \hat{\phi} - i\hat{\pi}) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} d^3 \mathbf{r} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$\int (p^0 \hat{\phi} + i\hat{\pi}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} d^3 \mathbf{r} = \hat{a}_{\mathbf{p}}$$

- A questo punto possiamo verificare che le relazioni di commutazione sui campi implicano le regole di commutazione sugli operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] &= \int \left[(k^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)), (p^0 \hat{\phi}(x') - i\hat{\pi}(x')) \right] \frac{e^{ik \cdot x}}{\sqrt{2k^0}} d^3 \mathbf{r} \frac{e^{-ip \cdot x'}}{\sqrt{2p^0}} d^3 \mathbf{r}' \\ &= \int \left[(k^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)), (p^0 \hat{\phi}(x') - i\hat{\pi}(x')) \right] \frac{e^{i(k^0 - p^0)t}}{\sqrt{2k^0 2p^0}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

x e x' hanno lo stesso t

$$\begin{aligned} & \left[(k^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)), (p^0 \hat{\phi}(x') - i\hat{\pi}(x')) \right] = \\ &= k^0 p^0 [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] - ik^0 [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')] + ip^0 [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')] + [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(x')] \\ &= -iik^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i(-i)p^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (k^0 + p^0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Quantizzazione canonica

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_p^\dagger] &= \int \left[(k^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)), (p^0 \hat{\phi}(x') - i\hat{\pi}(x')) \right] \frac{e^{i(k^0 - p^0)t}}{\sqrt{2k^0 2p^0}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = \\
 &= \int (k^0 + p^0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{e^{i(k^0 - p^0)t}}{\sqrt{2k^0 2p^0}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \quad \boxed{(k^0 + p^0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\
 &= \int (k^0 + p^0) \frac{e^{i(k^0 - p^0)t}}{\sqrt{2k^0 2p^0}} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad \boxed{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})} \\
 &\quad p^0 = k^0 \\
 &= \frac{(k^0 + p^0) e^{i(k^0 - p^0)t}}{\sqrt{2k^0 2p^0}} \boxed{= 1} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \\
 &\quad \boxed{[\hat{a}_k, \hat{a}_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})}
 \end{aligned}$$

- Analogamente si possono verificare le altre regole di commutazione
- Si potrebbe anche verificare la relazione inversa
 - Le regole di commutazione sugli operatori di creazione e distruzione implicano le regole di commutazione sui campi
- Concludiamo che i due insiemi di regole sono equivalenti

Calcolo dell'Hamiltoniana

- Per continuare a fare pratica con gli operatori di campo e le regole di commutazione possiamo esprimere l'Hamiltoniana in funzione degli operatori di creazione e distruzione per il campo di Klein-Gordon reale

$$\mathcal{H}(\pi, \phi, \partial_\mu \phi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi \phi]$$

$$\hat{H} = \int \mathcal{H} d^3 \mathbf{r}$$

$$\mathcal{H} = \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \phi = \frac{1}{2} [\dot{\phi} \dot{\phi} + \nabla \phi \nabla \phi + m^2 \phi \phi]$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int [\dot{\phi} \dot{\phi} + \nabla \phi \nabla \phi + m^2 \phi \phi] d^3 \mathbf{r}$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

$$\nabla \hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} i\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

$$\dot{\hat{\phi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} (-i\omega) [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}]$$

Calcolo dell'Hamiltoniana

- Cominciamo con il pezzo più complicato (poco più complicato)

$$\int \nabla \hat{\phi}(x) \nabla \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \int \frac{i\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}] \frac{i\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega'}} [\hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ik' \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{+ik' \cdot x}] d^3\mathbf{r}$$

- Per semplicità definiamo

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^0 t} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},t} \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik^0 t} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \int \frac{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega}\sqrt{2\omega'}} [\hat{a}_{\mathbf{k},t} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] [\hat{a}_{\mathbf{k}',t} e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}',t}^\dagger e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] d^3\mathbf{r}$$

- Con i diversi prodotti compaiono due tipi di δ
- Il termine $-\mathbf{k}\mathbf{k}'$ assume valori diversi

$$e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \sim (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$$

$$e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \sim (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \rightarrow -\mathbf{k}\mathbf{k}' = \mathbf{k}^2$$

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rightarrow -\mathbf{k}\mathbf{k}' = -\mathbf{k}^2$$

$$\int \nabla \hat{\phi}(x) \nabla \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} \right) [\hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{-\mathbf{k},t} + \hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},t} + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},t}^\dagger]$$

Calcolo dell'Hamiltoniana

- Veniamo al termine contenente il momento coniugato

$$\int \dot{\phi}(x) \dot{\phi}(x) d^3\mathbf{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \int \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}] \frac{i\omega'}{\sqrt{2\omega'}} [\hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ik' \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{+ik' \cdot x}] d^3\mathbf{r}$$

- Questo integrale è quasi identico a quello precedente
- La differenza risiede nel fatto che il termine $-\omega\omega'$ ha sempre lo stesso segno
- I termini con $a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ compaiono con segno opposto rispetto al caso precedente (segno negativo)

$$\int \dot{\phi}(x) \dot{\phi}(x) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(\frac{\omega^2}{2\omega} \right) [-\hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{-\mathbf{k},t} + \hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},t} - \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},t}^\dagger]$$

Calcolo dell'Hamiltoniana

- Per finire il termine che contiene il quadrato del campo

$$m^2 \int \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r}$$

$$= \frac{m^2}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik \cdot x}] \frac{1}{\sqrt{2\omega'}} [\hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{-ik' \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{+ik' \cdot x}] d^3\mathbf{r}$$

- Otteniamo un risultato molto simile al primo
- Tutti i prodotti hanno segno positivo

$$m^2 \int \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left(\frac{m^2}{2\omega} \right) [\hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{-\mathbf{k},t} + \hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},t} + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k},t}^\dagger]$$

- Sommiamo i tre integrali e moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$

- I termini con $a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ avranno un coefficiente (ricordiamo $E = \omega$)

$$\mathbf{k}^2 + m^2 - E^2 = 0$$

- I termini rimanenti avranno un coefficiente

$$\mathbf{k}^2 + m^2 + E^2 = 2E^2$$

$$H = \int \mathcal{H} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \frac{2E_{\mathbf{k}}^2}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},t}]$$

Calcolo dell'Hamiltoniana

- Notiamo infine che

$$\boxed{\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^0 t} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},t} \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik^0 t} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger} \quad \longrightarrow \quad \hat{a}_{\mathbf{k},t} \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \quad \hat{a}_{\mathbf{k},t}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},t} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

indipendenti dal tempo

$$\hat{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}]$$

- Il risultato che abbiamo trovato è molto simile a quanto avevamo trovato intuitivamente (diapositiva [171](#))
- Trasformiamo ulteriormente l'espressione trovata usando le regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1 \rightarrow \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = 1 + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} E_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right]}$$

- L'Hamiltoniana è la somma delle energie dei singoli oscillatori
- Il termine $\frac{1}{2} E_{\mathbf{k}}$ è legato all'energia del vuoto nell'oscillatore
- Nel caso di un campo porta ad un contributo divergente
 - Viene eliminato imponendo che i campi abbiano un ordinamento normale
 - In un prodotto normale (:AB:) gli operatori di distruzione stanno a destra

Digressione

- Il calcolo appena fatto, benché concettualmente semplice, è un po' laborioso

- Una complicazione deriva dagli integrali del tipo

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{+ip \cdot x} e^{+ik \cdot x}}{\sqrt{2p^0} \sqrt{2k^0}} d^3 \mathbf{r}$$

- Infatti, a differenza degli integrali con il segno negativo nell'esponente che contiene $k \cdot x$, questi contribuiscono con fattore un po' più complicato

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{+ip \cdot x} e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2p^0} \sqrt{2k^0}} d^3 \mathbf{r}$$

- Conviene definire una procedura standard che consenta di semplificare i calcoli

- Innanzitutto alcune notazioni

$$u_{\mathbf{k}}(x) \equiv \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2k^0}} \quad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad k \cdot x = k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

- Inoltre

$$f_1 \vec{\partial}_\mu f_2 \equiv f_1 (\partial_\mu f_2) - (\partial_\mu f_1) f_2$$

- Si può verificare che le funzioni $u_{\mathbf{k}}(x)$ oltre alla relazione standard

$$\int u_{\mathbf{k}}^*(x) u_{\mathbf{k}'}(x) \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2k^0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Soddisfano alle seguenti ulteriori regole di ortogonalità generalizzata

$$\begin{aligned} \int u_{\mathbf{k}}^*(x) i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}'}(x) \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') & \int u_{\mathbf{k}}(x) i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}'}^*(x) \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} &= -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \int u_{\mathbf{k}}(x) i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}'}(x) \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} &= 0 & \int u_{\mathbf{k}}^*(x) i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}'}^*(x) \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^3} &= 0 \end{aligned}$$

Digressione

- Tramite le funzioni $u_{\mathbf{k}}$ le espansioni dei campi diventano

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)] \quad \hat{\pi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} (-ik^0) [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

- L'inversione delle formule si esprime in modo più semplice

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \int u_{\mathbf{p}}^*(x) (p^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)) d^3\mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = \int u_{\mathbf{p}}^*(x) i\vec{\partial}_0 \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r}$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = \int u_{\mathbf{p}}(x) (p^0 \hat{\phi}(x) - i\hat{\pi}(x)) d^3\mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = - \int u_{\mathbf{p}}(x) i\vec{\partial}_0 \hat{\phi}(x) d^3\mathbf{r}$$

- Come esempio, diventa relativamente facile il calcolo del commutatore $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger]$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \left[\int u_{\mathbf{p}}^*(x) (p^0 \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)) d^3\mathbf{r}, \int u_{\mathbf{k}}(x') (k^0 \hat{\phi}(x') - i\hat{\pi}(x')) d^3\mathbf{r}' \right]$$

- Sono diversi da zero solo $[\hat{\phi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\phi}(\mathbf{r}')] = -i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

- Otteniamo pertanto

$$\int u_{\mathbf{k}}^*(x) u_{\mathbf{k}'}(x) \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2k^0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\begin{aligned} &= \int u_{\mathbf{p}}^*(x) d^3\mathbf{r} \int u_{\mathbf{k}}(x') d^3\mathbf{r}' (-ip^0 i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - ik^0 i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\ &= (p^0 + k^0) \int u_{\mathbf{p}}^*(x) u_{\mathbf{k}}(x) d^3\mathbf{r} = (2\pi)^3 \frac{2p^0}{2p^0} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$



Digressione

- Anche il calcolo dell'Hamiltoniana in funzione degli operatori di creazione e distruzione diventa più semplice

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \left[\dot{\hat{\phi}}\dot{\hat{\phi}} + \nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi} + m^2\hat{\phi}\hat{\phi} \right] d^3\mathbf{r}$$

Teorema di Gauss

- Innanzitutto notiamo che

$$\nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi} = \nabla \cdot (\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}) - \hat{\phi}\nabla^2\hat{\phi} \quad \int \nabla \cdot (\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}) d^3\mathbf{r} = \int (\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}) \cdot d\mathbf{a} \rightarrow 0$$

- Inoltre, per l'equazione di KG $\ddot{\hat{\phi}} - \nabla^2\hat{\phi} + m^2\hat{\phi} = 0$ $-\hat{\phi}\nabla^2\hat{\phi} = -\hat{\phi}\ddot{\hat{\phi}} - m^2\hat{\phi}\hat{\phi}$
- Pertanto l'Hamiltoniana si semplifica in

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \left[\dot{\hat{\phi}}\dot{\hat{\phi}} - \hat{\phi}\ddot{\hat{\phi}} \right] d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \hat{\phi} i\vec{\partial}_0 (i\dot{\hat{\phi}}) d^3\mathbf{r}$$

- Introducendo le rappresentazioni

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)] \quad \dot{\hat{\phi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} (-ik^0) [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r} p^0 [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)] i\vec{\partial}_0 [\hat{a}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(x) - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^*(x)]$$

- Sopravvivono solo (vedi diapositiva 185)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} p^0 [-\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger (-\delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}}] = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} p^0 [\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}]$$



Teorema di Noether

- Abbiamo già visto che le equazioni di campo si deducono minimizzando l'azione

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \qquad \delta S = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

- Il teorema di Noether[†] permette derivare leggi di conservazioni dalle proprietà di simmetria dell'Azione (e quindi della Lagrangiana)
 - L'azione può essere lasciata invariata da trasformazioni
 - Di simmetria interna (ad esempio isospin, gauge)
 - Di simmetria spazio-temporale (trasformazioni di Lorentz + traslazioni)
- Il teorema di Noether asserisce che
 - Ad ogni simmetria differenziabile che lascia invariata l'azione corrisponde una corrente conservata e, di conseguenza, una carica conservata
- Dato che l'azione è un integrale su d^4x la trasformazione di simmetria deve
 - Lasciare invariata la lagrangiana $\delta \mathcal{L} = 0$
 - Al più variare la lagrangiana di una 4-divergenza ($\delta \mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu$) che per il teorema di Gauss 4-dimensionale non contribuisce all'azione

$$\int \partial_\mu f^\mu d^4x = \oint f^\mu dS_\mu \rightarrow 0$$

- [†]Emmy Noether, Invariante Variationsprobleme. Göttingen 1918, pp. 235-257

Teorema di Noether

- Tipicamente, per le simmetrie interne il termine di 4-divergenza è nullo
 - La 4-divergenza è non nulla nel caso delle simmetrie dello spazio-tempo[†]
 - Trasformazioni del gruppo di Poincaré: Trasformazioni Lorentz e traslazioni
 - L'applicazione di una trasformazione del gruppo di simmetria provoca una variazione dei campi $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$
 - La variazione dei campi induce una variazione della Lagrangiana $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$
 - Nel caso delle simmetrie interne $\delta\mathcal{L} = 0$
 - Esiste una corrente j^μ conservata $\partial_\mu j^\mu = 0$
 - Nel caso delle simmetrie dello spazio tempo $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu$
 - Esiste una corrente j^μ tale che $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu f^\mu \rightarrow \partial_\mu (j^\mu - f^\mu) = 0$
- La corrente conservata implica l'esistenza di una carica conservata

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad \longrightarrow \quad \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$Q = \int \rho dV$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Per campi che vanno a zero all'infinito rapidamente

• [†]Peskin-Schroeder - An Introduction to Quantum Field Theory - cap. 2.2 p. 17

Teorema di Noether

- Una variazione $\delta\phi(x)$ di un campo è una funzione

- Infinitesima $\delta\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$

- Che si annulla agli estremi $\delta\phi(x_a) = \delta\phi(x_b) = 0$

- L'operazione di variazione commuta con la derivazione

- L'espressione $\partial_\mu\phi$ è una funzione (che dipende da ϕ)

$$\delta[\partial_\mu\phi(x)] = \partial_\mu\phi_1(x) - \partial_\mu\phi_2(x) = \partial_\mu[\phi_1(x) - \phi_2(x)] = \partial_\mu\delta\phi(x)$$

- Veniamo ora alla dimostrazione del teorema

- Per generalità supponiamo che la lagrangiana dipenda da più campi ($n = 1, N$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_n, \partial_\mu\phi_n)$$

- Calcoliamo la variazione della Lagrangiana

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_n + \delta\phi_n, \partial_\mu\phi_n + \delta\partial_\mu\phi_n) - \mathcal{L} \approx \sum_{n=1}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_n} \delta\phi_n + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \delta\partial_\mu\phi_n$$

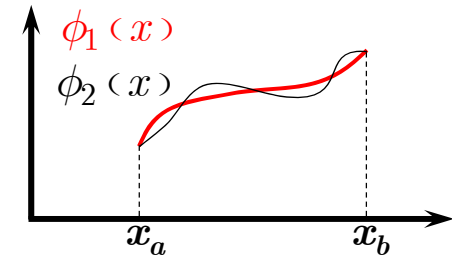
- Elaboriamo l'espressione

- Commutiamo δ con ∂_μ nel secondo termine

- Utilizziamo l'equazione di Eulero-Lagrange nel primo

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_n}$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \delta\phi_n + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \partial_\mu\delta\phi_n$$



Teorema di Noether

$$\delta\mathcal{L} = \sum_n \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \delta\phi_n + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \partial_\mu \delta\phi_n$$

- L'espressione può essere trasformata in una 4-divergenza

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \delta\phi_n$$

- Se la trasformazione di simmetria modifica solo i campi ma lascia invariata la lagrangiana allora la variazione è nulla: $\delta\mathcal{L} = 0$

- Otteniamo

$$\partial_\mu \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \delta\phi_n = 0$$

- Abbiamo inoltre supposto che l'operazione di simmetria sia differenziabile

- In generale, la variazione del campo dipende da M parametri arbitrari (ad esempio, una rotazione dipende da 3 parametri)

$$\delta\phi_n = \sum_{k=1}^M \frac{\delta\phi_n}{\delta\epsilon^k} \delta\epsilon^k$$

- Poiché la variazione dei campi è arbitraria possiamo variare gli M parametri indipendentemente (uno a uno) e otteniamo M espressioni

$$\partial_\mu \sum_n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \frac{\delta\phi_n}{\delta\epsilon^k} = 0 \quad k = 1, M$$