
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 6

17.10.2022

**Analisi di Fourier dei campi di KG ed EM
Radiazione del corpo nero - Ipotesi di Planck
Oscillatore Quantistico**

anno accademico 2022-2023

Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Consideriamo un campo (reale) $\phi(x)$ che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

- Possiamo rappresentare il campo con un integrale di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{\Phi}(k) e^{ik \cdot x}$$

- Se il campo è reale allora

$$\tilde{\Phi}(-k) = \tilde{\Phi}^*(k)$$

- L'applicazione di $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)$ a $\phi(x)$ dà

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k (-k^\mu k_\mu + m^2) \tilde{\Phi}(k) e^{ik \cdot x} = 0$$

- La funzione $\tilde{\Phi}(k)$ (k quadri-dimensionale) deve essere singolare

- Infatti deve essere $(-k^2 + m^2)\tilde{\Phi}(k) = 0 \implies \tilde{\Phi}(k) = 0$ per $-k^2 + m^2 \neq 0$

- E allo stesso tempo l'integrale che dà $\phi(x)$ deve essere non nullo

- Avremo pertanto

$$\tilde{\Phi}(k) = \Phi(k) \delta(k^2 - m^2)$$

- Possiamo eliminare la funzione $\delta(k^2 - m^2)$ integrando su k^0

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk^0 d^3\mathbf{k} \Phi(k) \delta(k^2 - m^2) e^{ik \cdot x}$$

Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Ricordiamo che

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad f(x_i) = 0$$

- Pertanto

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} [\delta(k^0 - E_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0 + E_{\mathbf{k}})]$$

- Introducendo nell'integrale di Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{k} \int \frac{dk^0}{2E_{\mathbf{k}}} \Phi(k) [\delta(k^0 + E_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0 - E_{\mathbf{k}})] e^{ik^0 t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)2E_{\mathbf{k}}} [\Phi(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) e^{-iE_{\mathbf{k}} t} + \Phi(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) e^{iE_{\mathbf{k}} t}] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- Inoltre, nel primo termine, possiamo utilizzare il fatto che gli integrali sono estesi da $-\infty$ a $+\infty$ per sostituire $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)2E_{\mathbf{k}}} [\Phi(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}) e^{-iE_{\mathbf{k}} t} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \Phi(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) e^{+iE_{\mathbf{k}} t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]$$

Analisi di Fourier del campo di Klein-Gordon

- Infine definiamo le due funzioni

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \Phi(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})$$

$$b(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \Phi(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$$

- Sostituiamo nell'integrale

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b(\mathbf{k})e^{+ik \cdot x}]$$

- Per un campo reale ricordiamo che

$$\tilde{\Phi}(-k) = \tilde{\Phi}^*(k)$$

- La condizione implica

$$b(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k})$$

- Per un campo reale l'espansione diventa

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{+ik \cdot x}]$$

- Per finire notiamo che se scriviamo $a(t) = a(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ $\omega_{\mathbf{k}} \equiv E_{\mathbf{k}}$
 - L'equazione di Klein-Gordon impone che $a(t)$ soddisfi l'equazione dell'oscillatore

$$\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + (\mathbf{k}^2 + m^2)a(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 a(t) = 0$$

Il campo elettromagnetico classico

- Appliciamo il formalismo appena esposto al campo elettromagnetico

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Introduciamo i potenziali $\mathbf{A}$ e Φ
- I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si ottengono dai potenziali come

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- È noto che potenziali sono definiti a meno di una trasformazione di gauge

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$$

- Si può infatti verificare che si ottengono gli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
- Sostituendo le espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nella seconda e terza equazione di Maxwell otteniamo le equazioni per i potenziali

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \nabla \cdot \mathbf{A} \right)$$

Il campo elettromagnetico classico

- Si può utilizzare l'indeterminazione dei potenziali per semplificare le equazioni
 - Si fissa il gauge
- I gauge più utilizzati sono
 - Il gauge di Lorentz
 - Le equazioni dei potenziali diventano

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Il gauge di Coulomb o gauge di radiazione
 - Le equazioni dei potenziali diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi$$

- Il gauge di Lorentz ha il vantaggio di essere covariante
 - Non dipende dal sistema di riferimento
- Il gauge di Coulomb non è covariante
 - Mette in evidenza il carattere trasversale dell'onda elettromagnetica

Onde elettromagnetiche

- Consideriamo adesso un campo elettromagnetico

- Utilizziamo il gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- Come abbiamo visto l'equazione del potenziale scalare diventa

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \cancel{\nabla \cdot \mathbf{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

- Nel vuoto, quindi in assenza di sorgenti:

- Pertanto il potenziale elettrico è nullo

$$\rho = 0 \quad \mathbf{J} = 0$$

$$\Phi = 0$$

- L'equazione per il potenziale vettore diventa

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \cancel{\mu_0 \mathbf{J}} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \cancel{\nabla \Phi} + \cancel{\nabla \cdot \mathbf{A}} \right)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

- Pertanto ciascuna delle componenti del potenziale soddisfa l'equazione dell'onda

- L'analisi di Fourier del potenziale conduce alla rappresentazione integrale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left[\mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x} \right]$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$$

- Come nel caso di Klein-Gordon, posto $a(t) = a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$

- L'equazione dell'onda impone che $a(t)$ soddisfi

$$\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 a(t) = 0$$

Onde elettromagnetiche

- La condizione del gauge di Coulomb permette di evidenziare la natura trasversale dell'onda

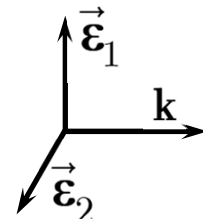
$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x}] = 0$$

- Pertanto le ampiezze $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ devono essere perpendicolari al vettore d'onda $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$$

- Il vettore $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ ha pertanto solo due gradi di libertà (stati di polarizzazione)

- Si introducono pertanto due vettori mutuamente perpendicolari e perpendicolari a $\mathbf{k}$



$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}_{\lambda}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k})$$

- Possiamo infine calcolare i campi elettrico e magnetico

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} c |\mathbf{k}| [\mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x}]$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - \mathbf{k} \times \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x}]$$

- Perché $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ siano reali deve essere

$$\mathbf{a}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{a}^*(\mathbf{k})$$

Cohen-Tannoudji et al.
Photons and Atoms
(Wiley 1997) p. 24



Onde elettromagnetiche

- L'energia associata al campo elettromagnetico è data da

$$U = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_o \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2 \right) d^3 \mathbf{r}$$

- Calcoliamo esplicitamente il primo integrale

$$\begin{aligned}
 \frac{U_E}{c^2} &= \frac{1}{2c^2} \int \varepsilon_o \mathbf{E}^2 d^3 \mathbf{r} & k = |\mathbf{k}| \\
 &= \frac{\varepsilon_o}{2} \int d^3 \mathbf{r} \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k}_1 k_1 \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \right) \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k}_2 k_2 \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}^* e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \right) \\
 &= \frac{-\varepsilon_o}{2} \int k_1 k_2 \left[\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2}^* \delta(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right] \frac{d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \\
 &= \frac{\varepsilon_o}{2} \int k_1^2 \left[-\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} \right] \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \\
 &= \frac{\varepsilon_o}{2} \int k_1^2 \left[2\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{-\mathbf{k}_1} \right] \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} & \mathbf{a}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \\
 &= \frac{\varepsilon_o}{2} \int k_1^2 \left[2\mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* + \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \right] \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} & U_E = \frac{2\varepsilon_o}{(2\pi)^3} \int \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* d^3 \mathbf{k} \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|
 \end{aligned}$$

Cohen-Tannoudji et al.
Photons and Atoms
(Wiley 1997) p. 24

Onde elettromagnetiche

- Analogamente si calcola l'energia associata a B

$$U_B = \frac{2}{\mu_o} \int |\mathbf{k}|^2 \mathbf{a}_\mathbf{k} \mathbf{a}_\mathbf{k}^* d^3\mathbf{k}$$

- L'energia totale è

$$U = \frac{4\varepsilon_o}{(2\pi)^3} \int \omega_\mathbf{k}^2 \mathbf{a}_\mathbf{k} \mathbf{a}_\mathbf{k}^* d^3\mathbf{k}$$

$$\omega_\mathbf{k} = c|\mathbf{k}| \quad \frac{1}{\varepsilon_o \mu_o} = c^2$$

- Vediamo che l'energia del campo è la somma delle energie degli oscillatori in cui è stato scomposto il campo
 - Notiamo che classicamente l'energia è proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione
 - Notiamo inoltre che hanno una energia proporzionale a $\omega_\mathbf{k}$ tutti gli oscillatori con momento 3-dimensionale $|\mathbf{k}|c = \omega_\mathbf{k}$
- Partendo da queste considerazioni si può calcolare, classicamente, lo spettro della radiazione in una cavità: lo spettro della radiazione del corpo nero
 - Calcoliamo innanzitutto il numero degli oscillatori per unità di energia (o frequenza) corrispondenti ad una energia $d\omega = cdk$

$$dN = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi |\mathbf{k}|^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi \omega^2 d\omega}{c^3 (2\pi)^3} = \frac{4\pi \nu^2 d\nu}{c^3}$$

- Tenendo conto che ogni oscillatore ha 2 gradi di libertà

$$dN = \frac{8\pi \nu^2 d\nu}{c^3}$$



Energia media dell'oscillatore

- L'energia del campo è espressa come somma delle energie di tanti oscillatori
- Quando la radiazione è in equilibrio all'interno della cavità
 - Il materiale delle pareti contiene oscillatori elettromagnetici che interagiscono con il campo
 - Le pareti assorbono radiazione dagli oscillatori del campo
 - Le pareti emettono radiazione che è assorbita dagli oscillatori del campo
- Quando si è all'equilibrio termico l'energia assorbita è uguale a quella emessa
 - Gli oscillatori sono in equilibrio termico
 - La loro energia media può essere calcolata con la meccanica statistica
 - L'energia del campo è l'energia media degli oscillatori per il loro numero

$$E = \sum_k E_k = N \frac{1}{N} \sum_k E_k = N\bar{E}$$

- La probabilità che un oscillatore abbia una energia U è data da

$$P(U) = \frac{\exp[-U/kT]}{\int_0^\infty \exp[-U/kT] dU} dU = \exp[-U/kT] \frac{dU}{kT}$$

- Pertanto, all'equilibrio termodinamico, l'energia media di ogni oscillatore è

$$\bar{U} = \int_0^\infty U \exp[-U/kT] \frac{dU}{kT} = kT \int_0^\infty x \exp[-x] dx = kT$$

Radiazione del corpo nero

$$\bar{U} = kT$$

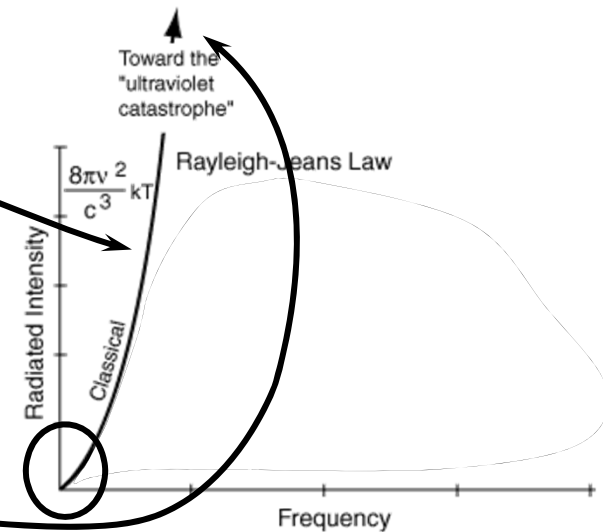
- Questo è il risultato classico dell'equipartizione dell'energia
 - Un ingrediente essenziale è stato aver assunto che l'oscillatore può assumere un valore arbitrario di energia U
 - Distribuzione continua dell'energia
- Utilizziamo il risultato per calcolare la distribuzione di energia della radiazione del corpo nero
 - Associamo ad ogni gruppo di oscillatori di frequenza $\nu - \nu + d\nu$ una energia kT
- La densità di energia è pertanto

$$dU = dN\bar{U} = dNkT$$

$$dU = kT \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

- Questa è la famosa legge di Rayleigh-Jeans
- È la previsione classica dello spettro della radiazione del corpo nero
- È in accordo con i dati solo a bassissime frequenze

catastrofe ultravioletta



Ipotesi di Planck

- Per risolvere il problema precedente Planck ipotizzò che
 - L'oscillatore non può assumere tutte le energie possibili classicamente
 - L'energia dipende solo dalla frequenza $\nu = \omega/2\pi$
 - L'energia può assumere solo valori che sono un multiplo intero di $h\nu$

$$U_n = nh\nu$$

- Calcoliamo l'energia media
 - Preliminarmente la distribuzione di probabilità

$$P(U) = \frac{\exp[-U/kT]}{\int_0^\infty \exp[-U/kT] dU} dU \quad \longrightarrow \quad P(U_n) = \frac{\exp[-U_n/kT]}{\sum_{n=0}^\infty \exp[-U_n/kT]}$$

- Calcoliamo innanzitutto il denominatore

$$A = \sum_{n=0}^\infty \exp[-nh\nu/kT] \quad \text{posto} \quad x = \exp[-h\nu/kT] < 1 \quad A = \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

- Otteniamo infine

$$A = \frac{1}{1 - \exp[-h\nu/kT]}$$

Ipotesi di Planck

- Veniamo adesso al calcolo del valore medio

$$A \bar{U} = \sum_{n=0}^{\infty} h\nu n \exp[-nh\nu / kT] \quad \text{posto} \quad \alpha = h\nu / kT$$

$$A = \frac{1}{1 - \exp[-h\nu / kT]}$$

$$A \bar{U} = h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\alpha} = -h\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} = -h\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}$$

- Concludendo

$$\bar{U} = \frac{h\nu \exp[-h\nu / kT]}{1 - \exp[-h\nu / kT]}$$

$$\bar{U} = \frac{h\nu}{\exp[h\nu / kT] - 1}$$

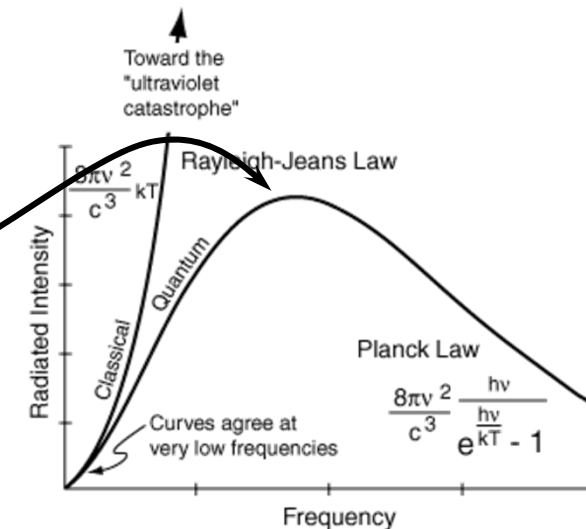
notiamo che se $h\nu \rightarrow 0$

$$\bar{U} \rightarrow \frac{h\nu}{1 - (1 - h\nu / kT)} = kT$$

- La distribuzione dell'energia nella cavità diventa

$$dU = \bar{U} dN = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp[h\nu / kT] - 1} d\nu$$

- L'accordo con i dati sperimentali è perfetto
- L'ipotesi critica è stata la natura discreta dell'energia dell'oscillatore



Quantum Field Theory: Introduzione

- Un campo elettromagnetico all'interno di una cavità presenta degli aspetti interpretabili con una visione "particellare" del campo
 - Il campo può essere rappresentato come integrale di Fourier
 - All'equazione dell'onda corrisponde un'equazione di oscillatore armonico per ogni componente
 - L'energia del campo è espressa come somma delle energie dei singoli oscillatori
- Per un campo all'interno di una cavità in equilibrio termico con le pareti si può utilizzare la meccanica statistica per descrivere
 - La distribuzione di energia degli oscillatori
 - L'energia media degli oscillatori
- Abbiamo visto che
 - L'utilizzo del principio di equipartizione dell'energia (classico) porta alla distribuzione di Rayleigh-Jeans
 - In disaccordo con le osservazioni sperimentali
 - L'ipotesi di Planck che l'energia di ogni oscillatore sia un multiplo intero di $h\nu$ conduce alla distribuzione di Planck
 - In ottimo accordo con le osservazioni sperimentali

Quantum Field Theory: Introduzione

- Ai nostri fini, l'aspetto più importante del calcolo della radiazione del corpo nero è che il campo può essere visto come un insieme di particelle (quanti)
 - Alla descrizione ondulatoria (campo) si affianca una descrizione particellare
 - Dualità onda-particella
 - L'aspetto particellare è associato ai modi descritti da oscillatori (fotoni)
 - L'energia degli oscillatori è quantizzata ($E_n = nh\nu$)
 - Il formalismo dell'oscillatore quantistico è perfetto per questo scopo
- Proveremo ad estendere questa formulazione alle equazioni d'onda relativistiche (Klein-Gordon, Dirac)
 - Le differenze con il campo elettromagnetico sono
 - Il campo elettromagnetico ha una interpretazione classica
 - Le equazioni di Dirac e di Klein Gordon non hanno corrispettivo classico
 - L'analogia è pertanto
 - Il campo elettromagnetico e le equazioni di Dirac e di Klein-Gordon mettono in evidenza gli aspetti ondulatori
 - La descrizione in termini di oscillatori quantizzati mette in evidenza gli aspetti particellari (quanti del campo)

L'oscillatore quantistico

- Rivediamo la teoria dell'oscillatore armonico quantistico
 - In seguito, per i campi, utilizzeremo il formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano
 - È conveniente trattare anche l'oscillatore armonico in questo modo
- La Lagrangiana di un oscillatore armonico con un grado di libertà q è

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

- L'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \longrightarrow \quad m\ddot{q} = -m\omega^2 q$$

- Le due soluzioni di questa equazione sono
- Pertanto la soluzione generale (reale) è

$$q(t) = e^{\pm i\omega t}$$

$$q(t) = Ae^{+i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}$$

L'oscillatore quantistico

- Passiamo al formalismo Hamiltoniano
- Il momento canonico è definito da

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

- L'Hamiltoniana è

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = T + U$$

- Le Equazioni di Hamilton danno

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{cases} \begin{matrix} \text{ritroviamo la definizione di } p \\ \longrightarrow \end{matrix} \boxed{\ddot{q} = -\omega^2 q}$$

L'oscillatore quantistico

- La quantizzazione dell'oscillatore si ottiene
 - Trasformando p e q in operatori
 - Imponendo la regola di commutazione ($\hbar=1$)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i$$

- Utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg
 - Funzioni d'onda indipendenti dal tempo
 - Operatori dipendenti dal tempo
- L'evoluzione di $q(t)$ e di $p(t)$ è pertanto

$$\frac{\partial \hat{O}}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{O}]$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{q}] = i\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2, \hat{q}\right] = \frac{i}{2m}[\hat{p}^2, \hat{q}] = \frac{i}{2m}([\hat{p}, \hat{q}]\hat{p} + \hat{p}[\hat{p}, \hat{q}]) \quad \boxed{\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} = \frac{\hat{p}}{m}}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{p}] = i\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2, \hat{p}\right] = \frac{i}{2}m\omega^2[\hat{q}^2, \hat{p}] = \frac{i}{2}m\omega^2([\hat{q}, \hat{p}]\hat{q} + \hat{q}[\hat{q}, \hat{p}])$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = -m\omega^2\hat{q}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial t^2} = -\omega^2\hat{q}}$$

uguali alle equazioni classiche

L'oscillatore quantistico

- È noto che la quantizzazione dell'oscillatore rende discrete le energie che la particelle può assumere

$$\hat{H}|u_E\rangle = E|u_E\rangle$$

- Occorre risolvere l'equazione agli autovalori

- Si può risolvere questo problema prescindendo dalla forma esplicita di $\hat{p}$ e $\hat{q}$
- Si introducono gli operatori (dipendenti dal tempo)

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q}(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p}(t) \right) \quad \hat{a}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q}(t) - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p}(t) \right)$$

- Si verifica facilmente che gli operatori $\hat{a}(t)$ e $\hat{a}^\dagger(t)$ hanno la seguente regola di commutazione

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1$$

- Utilizzando gli operatori $\hat{a}(t)$ e $\hat{a}^\dagger(t)$ l'Hamiltoniana diventa

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2 \quad \hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) + \hat{a}(t) \hat{a}^\dagger(t)) \omega = \left(\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right) \omega$$

- L'evoluzione temporale di $\hat{a}(t)$ è data da

$$\frac{\partial \hat{a}(t)}{\partial t} = i[\hat{H}, \hat{a}(t)] = i \left[\left(\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right) \omega, \hat{a}(t) \right] = i\omega [\hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t), \hat{a}(t)]$$

$$= i\omega [\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)] \hat{a}(t)$$

$$\frac{\partial \hat{a}(t)}{\partial t} = -i\omega \hat{a}(t) \quad \hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$$

L'oscillatore quantistico

- Analogamente si trova

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{+i\omega t}$$

- Per semplificare la notazione da ora in poi

$$\hat{a}(0) \equiv \hat{a} \quad \hat{a}^\dagger(0) \equiv \hat{a}^\dagger$$

- Evidentemente

$$\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

- E pertanto l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo $\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega$
- Nella teoria gioca un ruolo molto importante l'operatore Numero

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

- L'operatore N è hermitiano e pertanto i suoi autovalori sono reali

- Sono inoltre positivi (non negativi)

- Infatti consideriamo un autostato $|n\rangle$ $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$$\langle n | \hat{N} | n \rangle = n \langle n | n \rangle = \langle n | \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle$$

- Osserviamo che

$$\langle n | n \rangle = ||n\rangle|^2 \geq 0 \quad \langle n | \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle = |\hat{a}|n\rangle|^2 \geq 0 \quad \text{Pertanto } n \geq 0$$

- Si verifica facilmente che

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$$

ovviamente $\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\omega$

L'oscillatore quantistico

- Dalle regole precedenti discende che se $|n\rangle$ è un autostato dell'operatore Numero N sono suoi autostati anche $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ e $\hat{a} |n\rangle$

- Infatti
$$N\hat{a}^\dagger |n\rangle = (\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{N}) |n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger |n\rangle$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

- E inoltre
$$N\hat{a} |n\rangle = (-\hat{a} + \hat{a}\hat{N}) |n\rangle = (n-1)\hat{a} |n\rangle$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$$

- Pertanto $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ e $\hat{a} |n\rangle$ sono autostati di N
- Consideriamo lo stato $\hat{a}^k |n\rangle$ ($k < n$)
 - L'autovalore di N corrispondente è $\hat{N}\hat{a}^k |n\rangle = (n-k)\hat{a}^k |n\rangle$
 - Se k assumesse valori $k > n$ il risultato contraddirebbe la positività di N
- Per evitare questa contraddizione concludiamo che
 - Gli autovalori di N sono numeri interi
 - Esiste uno stato $|0\rangle$ (lo stato vuoto) con autovalore 0 che ha le proprietà

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad \hat{N} |0\rangle = 0 |0\rangle = 0$$

Postulato

- Gli stati con autovalore n possono essere costruiti a partire dal vuoto tramite l'applicazione ripetuta dell'operatore $\hat{a}^\dagger$
 - L'operatore $\hat{a}^\dagger$ prende il nome di operatore di creazione
 - L'operatore $\hat{a}$ prende il nome di operatore di distruzione



L'oscillatore quantistico

- A partire dal vuoto si possono costruire esplicitamente gli autovettori di N

- Lo stato $|1\rangle$ è normalizzato

$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle$

$\langle 1 | = (a^\dagger |0\rangle)^\dagger = \langle 0 | a$
 $\langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | 1 + a^\dagger a | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$

$\langle 1 | 1 \rangle = 1$



$a | 0 \rangle = 0$

- Analogamente lo stato

$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger a^\dagger |0\rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle 2 | 2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | a a a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | a (1 + a^\dagger a) a^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a a^\dagger a a^\dagger | 0 \rangle) = \frac{1}{2} (1 + \langle 0 | a a^\dagger (1 + a^\dagger a) | 0 \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1
 \end{aligned}$$

- Per induzione si può dimostrare che lo stato con n particelle è ottenuto dalla applicazione ripetuta n volte dell'operatore $a^\dagger$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$

L'oscillatore quantistico

- Per finire osserviamo che gli autostati dell'operatore numero N sono anche autostati dell'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \omega$$

- Pertanto

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega$$

- Osserviamo che l'energia del vuoto non è nulla

$$E_0 = \frac{1}{2} \omega$$

- Commenti

- Abbiamo diagonalizzato l'Hamiltoniana e trovato gli autovalori dell'energia utilizzando solo proprietà algebriche
 - La soluzione è la stessa per tutti i problemi che hanno le stesse regole di commutazione per gli operatori a
 - Se gli a hanno anche una espressione esplicita in termini di operatori differenziali si può trovare una espressione esplicita per gli stati
 - Ad esempio i Polinomi di Hermite
- L'Hamiltoniana è definita positiva perché N è definito positivo
- Dato che N e H commutano il numero delle particelle è costante
 - Questo accade in tutte le teorie senza interazione