
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 5

11.10.2022

Scattering di Coulomb per
particelle di spin $1/2$
Tracce di matrici γ . Proiettori di spin
Effetti di polarizzazione nello
scattering Coulombiano

anno accademico 2022-2023

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- Il calcolo del prodotto di spinori (C) utilizzando la rappresentazione esplicita è già abbastanza lungo e noioso
 - Lo scattering Coulombiano è un caso semplice
 - È stato sufficiente calcolare il modulo dell'elemento temporale $\bar{u}_f \gamma^0 u_i = u_f^\dagger u_i$ dato che solo A_0 era diverso da zero
 - C'è una sola particella perché calcoliamo una scattering da potenziale
 - In casi più complessi abbiamo bisogno di tecniche più potenti
- Introduciamo queste tecniche partendo dal caso semplice dello scattering coulombiano
 - Prima di fare la semplificazione per campo coulombiano statico abbiamo

$$V_{fi} \sim \bar{u}_f \gamma^\mu u_i A_\mu$$

- Calcoliamo il modulo quadrato

$$|V_{fi}|^2 \sim (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i A_\mu) (\bar{u}_f \gamma^\nu u_i A_\nu)^* = (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)^* A_\mu A_\nu^*$$

- Considerando per il momento il caso di fascio non polarizzato senza misura della polarizzazione nello stato finale dobbiamo calcolare

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)^* \quad |V_{fi}|^2 = L^{\mu\nu} A_\mu A_\nu^*$$

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- Consideriamo il tensore $L^{\mu\nu}$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)^* = \frac{1}{2} \sum_{i,f} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \overline{(\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{u}_i \gamma^\nu u_f)$$

$$\left[(\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right] \left[(\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right]^*$$

Utilizziamo $(\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)^* = \overline{(\bar{u}_f \gamma^\nu u_i)}$

$$\overline{\gamma^\nu} = \gamma^\nu$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{u}_i \gamma^\nu u_f) \quad (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Scriviamo esplicitamente gli indici delle matrici

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} (\bar{u}_f)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_i)_\beta (\bar{u}_i)_\rho (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} (u_f)_\sigma$$

- Adesso i simboli sono numeri e possono essere spostati a piacere

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{i,f} \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} (u_f)_\sigma (\bar{u}_f)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (u_i)_\beta (\bar{u}_i)_\rho (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Inoltre invertiamo l'ordine delle sommatorie su i rispetto a quelle su $\alpha\beta\rho\sigma$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} \sum_f (u_f)_\sigma (\bar{u}_f)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \sum_i (u_i)_\beta (\bar{u}_i)_\rho (\gamma^\nu)_{\rho\sigma}$$

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} \sum_f (u_f)_\sigma (\bar{u}_f)_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \sum_i (u_i)_\beta (\bar{u}_i)_\rho (\gamma^\nu)_{\rho\sigma}$$

- Le somme su i e su f sono due matrici

$$A_{\sigma\alpha} = \sum_f (u_f)_\sigma (\bar{u}_f)_\alpha \quad B_{\beta\rho} = \sum_i (u_i)_\beta (\bar{u}_i)_\rho \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} (\cdots) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- Abbiamo

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\rho\sigma} A_{\sigma\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} B_{\beta\rho} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} \quad \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \right\}$$

- Riconosciamo

- Il prodotto di 4 matrici
- La traccia della matrice risultante

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} [A \gamma^\mu B \gamma^\nu]$$

- Adesso occorre calcolare le matrici A e B

$$A = \sum_f u_f \bar{u}_f = \sum_{\pm s_f} u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \quad B = \sum_i u_i \bar{u}_i = \sum_{\pm s_i} u(\mathbf{p}_i, s_i) \bar{u}(\mathbf{p}_i, s_i)$$

- Notiamo che queste somme hanno una somiglianza con le relazioni di completezza (slide [81](#))

$$\sum_{r=1,2} [u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r] = 2m\hat{I}$$

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- In realtà c'è più che una somiglianza

$$A = \sum_{\pm s_f} u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f)$$

- Gli operatori A (e B) sono la parte con energia positiva delle relazioni di completezza

- Ricordiamo le equazioni di Dirac per gli spinori u e v

$$\sum_{r=1,2} [u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r] = 2m\hat{I}$$

$$(\not{p} - m)u = 0$$

$$(\not{p} + m)v = 0$$

- Definiamo gli operatori

$$\Lambda_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\not{p}}{m} \right)$$

- Utilizzando le equazioni precedenti possiamo facilmente verificare che

$$\Lambda_+(p)u(p, s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\not{p}}{m} \right) u(p, s) = \frac{1}{2} \left(u(p, s) + \frac{m}{m} u(p, s) \right) = u(p, s)$$

$$\Lambda_+(p)v(p, s) = 0$$

- E analogamente

$$\Lambda_-(p)v(p, s) = v(p, s)$$

$$\Lambda_-(p)u(p, s) = 0$$

$$\Lambda_+(p)u(p, s) = u(p, s)$$

$$\Lambda_+(p)v(p, s) = 0$$

- Gli operatori $\Lambda_{\pm}$ sono gli operatori di proiezione per le energie positive e negative rispettivamente

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- Possiamo pertanto scrivere (un modo complicato per scrivere 0)

• Inoltre

$$\sum_{\pm s_f} \Lambda_+(p_f) v(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{v}(\mathbf{p}_f, s_f) = \sum_{\pm s_f} 0 \bar{v}(\mathbf{p}_f, s_f) = 0$$

$$A = \sum_{\pm s_f} u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) = \sum_{\pm s_f} \Lambda_+(p_f) u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f)$$

- Mettendo insieme i vari pezzi otteniamo

$$A = \sum_{\pm s_f} \Lambda_+(p_f) u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) - 0$$

$$A = \sum_{\pm s_f} \Lambda_+(p_f) u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) - \sum_{\pm s_f} \Lambda_+(p_f) v(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{v}(\mathbf{p}_f, s_f)$$

$$A = \Lambda_+(p_f) \left[\sum_{\pm s_f} u(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) - \sum_{\pm s_f} v(\mathbf{p}_f, s_f) \bar{v}(\mathbf{p}_f, s_f) \right]$$

$2m\hat{I}$ 

$$A = \Lambda_+(p_f) 2m\hat{I} = 2m\Lambda_+(p_f) = (\not{p}_f + m)$$

- Un calcolo analogo con gli spinori di energia negativa permette di concludere

$$\sum_{\pm s} u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \not{p} + m$$

$$\sum_{\pm s} v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \not{p} - m$$

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- Ritorniamo al tensore $L^{\mu\nu}$ (diapositiva [109](#))

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[A\gamma^\mu B\gamma^\nu]$$

- Introducendo i risultati trovati per gli operatori A e B

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_f + m)\gamma^\mu (\not{p}_i + m)\gamma^\nu]$$

- Il problema del calcolo dell'elemento di matrice è stato ricondotto al calcolo di una traccia
- Sviluppando la matrice di cui vogliamo calcolare la traccia

$$(\not{p}_f + m)\gamma^\mu (\not{p}_i + m)\gamma^\nu = \not{p}_f\gamma^\mu \not{p}_i\gamma^\nu + m\not{p}_f\gamma^\mu\gamma^\nu + m\gamma^\mu \not{p}_i\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu\gamma^\nu$$

- La traccia che cerchiamo è la somma delle tracce individuali
- Riconosciamo 3 tipologie

- La traccia del prodotto di 4 matrici

$$\not{p}_f\gamma^\mu \not{p}_i\gamma^\nu = p_{f\alpha}p_{i\beta}\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu$$

- La traccia del prodotto di 3 matrici

$$m\not{p}_f\gamma^\mu\gamma^\nu = mp_{f\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu$$

- La traccia del prodotto di 2 matrici

$$m^2\gamma^\mu\gamma^\nu$$

Tecniche utilizzanti le tracce delle matrici γ

- Riportiamo di seguito le principali proprietà delle tracce di prodotti di matrici γ

$$\text{Tr}[I] = 4$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4a \cdot b$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma] = 0$$

$$\text{Tr}\left[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\rho}_{n.\text{dispari}}\right] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)]$$

- Queste identità possono essere dimostrata a partire dalle proprietà generali delle matrici γ^μ e dalle regole di commutazione
 - Sono indipendenti dalla rappresentazione

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Possiamo adesso utilizzare le regole precedenti per calcolare il tensore leptónico

$$\begin{aligned} 2L^{\mu\nu} &= \text{Tr}[(\not{p}_f + m)\gamma^\mu(\not{p}_i + m)\gamma^\nu] \\ &= \text{Tr}[\not{p}_f\gamma^\mu\not{p}_i\gamma^\nu] + m\text{Tr}[\not{p}_f\gamma^\mu\gamma^\nu] + m\text{Tr}[\gamma^\mu\not{p}_i\gamma^\nu] + m^2\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] \\ &= p_{f\alpha}p_{i\beta}\text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] + mp_{f\alpha}\text{Tr}[\gamma^\alpha\cancel{\gamma^\mu}\gamma^\nu] + mp_{i\alpha}\text{Tr}[\gamma^\mu\cancel{\gamma^\alpha}\gamma^\nu] + m^2\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] \\ &= p_{f\alpha}p_{i\beta}\text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] + m^2\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] \quad \text{numero dispari di matrici} \\ &= p_{f\alpha}p_{i\beta}4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}) + 4m^2g^{\mu\nu} \\ &= 4(p_f^\mu p_i^\nu + p_f^\nu p_i^\mu - p_f \cdot p_i g^{\mu\nu}) + 4m^2g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$L^{\mu\nu} = 2(p_f^\mu p_i^\nu + p_f^\nu p_i^\mu - p_f \cdot p_i g^{\mu\nu}) + 2m^2g^{\mu\nu}$$

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Ricordiamo che nel problema dello scattering di Coulomb il potenziale era

$$A_\mu(x) = (A_0, \mathbf{0})$$

- L'unico elemento del tensore leptónico che sopravvive è L^{00}

$$L^{\mu\nu} = 2(p_f^\mu p_i^\nu + p_f^\nu p_i^\mu - p_f \cdot p_i g^{\mu\nu}) + 2m^2 g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} L^{00} &= 2(p_f^0 p_i^0 + p_f^0 p_i^0 - p_f \cdot p_i g^{00}) + 2m^2 g^{00} \\ &= 2[2E_i E_f - (E_i E_f - |\mathbf{p}_i \mathbf{p}_f| \cos \theta)] + 2m^2 \end{aligned}$$

- Nello scattering elastico $E_i = E_f = E$ e $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}|$

$$L^{00} = 2[E^2 + \mathbf{p}^2 \cos \theta + (E^2 - \mathbf{p}^2)] = 2[2E^2 - \mathbf{p}^2 (1 - \cos \theta)]$$

$$L^{00} = 2 \left[2E^2 - 2\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E}$$

$$L^{00} = 4E^2 \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

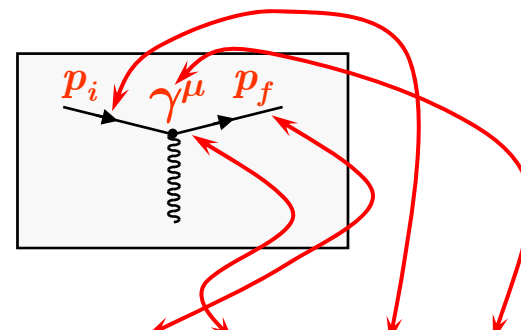
- La quantità L^{00} appena calcolata coincide con la somma C della diapositiva [105](#)
 - Il calcolo prosegue come in precedenza e, ovviamente, si arriva allo stesso risultato

Scattering Coulombiano: spin $\frac{1}{2}$

- Vedremo che i calcoli che abbiamo fatto possono messi in relazione a diagrammi: Diagrammi di Feynman
 - Ad esempio il calcolo perturbativo al primo ordine dello scattering di coulomb per un fermione ha come diagramma
 - Una corrente elettromagnetica

$$j^\mu = -ie\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^\mu u(p_i, s_i)$$

- Interagisce con fotone (potenziale) A_μ
- A questo diagramma si può associare automaticamente il tensore leptonico



$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_f + m)\gamma^\mu(\not{p}_i + m)\gamma^\nu]$$

- Questa espressione si scrive percorrendo da destra a sinistra il diagramma
 - Stato finale $\not{p}_f + m$
 - Vertice γ^μ
 - Stato iniziale $\not{p}_i + m$
 - Vertice γ^ν

Effetti di polarizzazione

- In alcuni casi il metodo delle tracce introdotto non è direttamente utilizzabile
 - Quando si usa un fascio polarizzato
 - Se si vuole misurare la polarizzazione nello stato finale
- Tuttavia è possibile utilizzare una strategia simile

Non si somma
sulle polarizzazioni

- Rivediamo i punti essenziali del metodo introdotto
 - Per limitare la somma agli stati di energia positiva abbiamo utilizzato i proiettori Λ
 - In tal modo si può estendere la somma agli stati di energia negativa
 - I proiettori ci assicurano che questi (stati $p_0 < 0$) non contribuiscono effettivamente nella somma
 - La linearità dei proiettori permette di fare prima la somma su tutti gli stati e solo successivamente applicare il proiettore
- Un metodo analogo per studiare la polarizzazione richiede i proiettori di spin
- Vogliamo costruire un operatore con le seguenti proprietà

$$P_{\Sigma}(s)u(\mathbf{p}, s) = u(\mathbf{p}, s) \quad P_{\Sigma}(s)v(\mathbf{p}, s) = 0$$

$$P_{\Sigma}(-s)u(\mathbf{p}, s) = 0 \quad P_{\Sigma}(-s)v(\mathbf{p}, s) = v(\mathbf{p}, s)$$

- Alcune importanti proprietà di questi operatori

$$P_{\Sigma}(s) + P_{\Sigma}(-s) = I \quad P_{\Sigma}(s)P_{\Sigma}(-s) = 0 \quad P_{\Sigma}(s)P_{\Sigma}(s) = P_{\Sigma}(s) \quad P_{\Sigma}(-s)P_{\Sigma}(-s) = P_{\Sigma}(-s)$$

Effetti di polarizzazione

- Nel calcolo del tensore leptonico $L^{\mu\nu}$ siamo partiti dall'espressione

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1=\pm s_f, \sigma_2=\pm s_i} (\bar{u}(p_f, \sigma_1) \gamma^\mu u(p_i, \sigma_2)) (\bar{u}(p_i, \sigma_2) \gamma^\nu u(p_f, \sigma_1))$$

- Supponiamo che lo stato iniziale sia polarizzato

- Non abbiamo più la somma sugli stati iniziali (somma su σ_2)

$$L^{\mu\nu} = \cancel{\frac{1}{2}} \sum_{\sigma_1=\pm s_f} (\bar{u}(p_f, \sigma_1) \gamma^\mu u(p_i, \sigma_2)) (\bar{u}(p_i, \sigma_2) \gamma^\nu u(p_f, \sigma_1))$$

- Inoltre, dal momento che rimane un solo stato, si elimina la media
- Per potere utilizzare le relazioni di completezza occorre reintrodurre la somma sugli stati iniziali
- Possiamo utilizzare i proiettori di spin

$$P_\Sigma(s_i) u(p_i, s_i) = u(p_i, s_i) \quad P_\Sigma(s_i) u(p_i, -s_i) = 0$$

- Se introduciamo il proiettore possiamo estendere di nuovo la somma ai due stati di polarizzazione

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_1=\pm s_f, \sigma_2=\pm s_i} (\bar{u}(p_f, \sigma_1) \gamma^\mu P_\Sigma(s_i) u(p_i, \sigma_2)) (\bar{u}(p_i, \sigma_2) \gamma^\nu u(p_f, \sigma_1))$$

È sufficiente introdurre P_Σ una sola volta

Effetti di polarizzazione

- Da questo punto in poi il calcolo procede come nel caso senza polarizzazione
 - Si arriva al risultato

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu P_\Sigma(s_i) (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- Analogamente, se si volesse misurare la polarizzazione dello stato finale si introdurrebbe il proiettore $P_\Sigma(s_f)$

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[P_\Sigma(s_f) (\not{p}_f + m) \gamma^\mu (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- Pertanto abbiamo bisogno degli operatori di proiezione
- Anticipiamo la forma di un proiettore di spin

$$P_\Sigma(\pm s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{s}}{2}$$

- Il tensore leptonico, per una polarizzazione $+s_i$ dello stato iniziale, diventa

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

Proiettori di spin

- Approfondiamo innanzitutto il significato dei proiettori di spin
 - Lo spin non si conserva per una particella in movimento
 - Abbiamo introdotto lo spin facendo riferimento al sistema di riposo
- Nel sistema di riposo la definizione di un proiettore è semplice

- L'operatore di spin è $S = \frac{1}{2} \Sigma$

$$\Sigma^j = \sigma^{kl} = i\gamma^k \gamma^l$$

non dipende dalla rappresentazione

- I possibili stati di un fermione possono essere descritti con i due spinori u con $p = 0$ e con polarizzazione $\pm \xi$

$$u(0, \pm s') \quad s'^\nu = (0, \pm \xi)$$

- Come nella teoria non relativistica si ha

$$(\Sigma \cdot \xi) u(0, \pm s') = \pm u(0, \pm s')$$

non dipende dalla rappresentazione

- Pertanto, nel sistema di riposo, i proiettori sono semplicemente

$$P_\Sigma(+\xi) = \frac{1 + \Sigma \cdot \xi}{2} \quad P_\Sigma(-\xi) = \frac{1 - \Sigma \cdot \xi}{2}$$

- Si ha ovviamente

$$P_\Sigma(+\xi) u(0, s') = u(0, s')$$

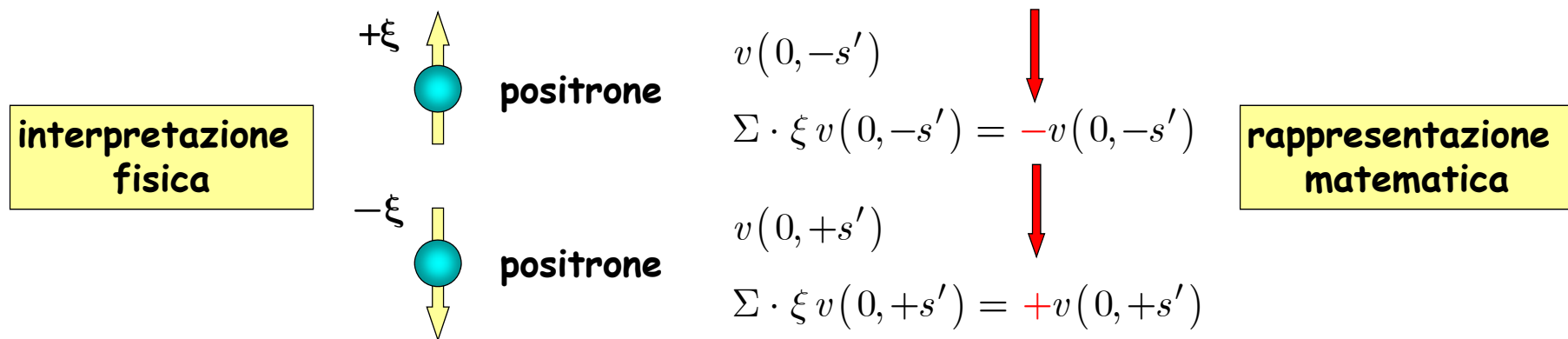
$$P_\Sigma(+\xi) u(0, -s') = 0$$

$$P_\Sigma(-\xi) u(0, s') = 0$$

$$P_\Sigma(-\xi) u(0, -s') = u(0, -s')$$

Proiettori di spin

- Estendiamo le definizioni alle soluzioni di energia negativa v
 - Abbiamo una complicazione aggiuntiva
 - L'interpretazione di hole associa lo spin fisico agli autovalori di $\Sigma \cdot \xi$ con i segni invertiti



- Il valore della grandezza fisica associata all'antiparticella è l'autovalore in rosso cambiato di segno
- Ovviamente vogliamo un formalismo che superi questa difficoltà
 - Un operatore il cui autovalore abbia il segno corretto automaticamente
 - Possiamo utilizzare la proprietà che gli spinori u e v sono autovettori di γ^0 con autovalori $+1$ e -1 rispettivamente

$$\gamma^0 u(0, s) = +u(0, s) \quad \gamma^0 v(0, s) = -v(0, s)$$

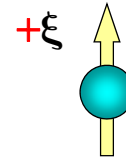
Proiettori di spin

- Possiamo pertanto modificare l'operatore $\xi \cdot \Sigma$ nel seguente modo

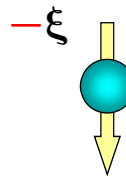
$$\xi \cdot \Sigma \quad \longrightarrow \quad \xi \cdot \Sigma \gamma^0$$

- Con questo operatore ovviamente

$$\Sigma \cdot \xi \gamma^0 v(0, -s') = +v(0, -s')$$



$$\Sigma \cdot \xi \gamma^0 v(0, +s') = -v(0, +s')$$



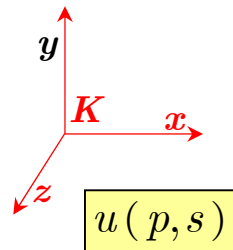
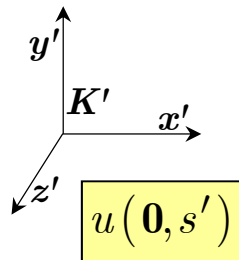
- Per quanto riguarda gli spinori u non cambia nulla dato che $\gamma^0 u = u$
- Gli operatori di proiezione, nel sistema di riposo, sono pertanto

$$P_{\Sigma}(+\xi) = \frac{1 + \xi \cdot \Sigma \gamma^0}{2} \quad P_{\Sigma}(-\xi) = \frac{1 - \xi \cdot \Sigma \gamma^0}{2}$$

- Proiettano gli stati con polarizzazione **fisica $\pm \xi$**
- Si comportano allo stesso modo per gli spinori u e v

Proiettori di spin

- Fin qui abbiamo fatto considerazioni nel sistema di riposo della particella
 - Possiamo ottenere gli spinori per una particella in movimento con una trasformazione di Lorentz



$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p'^\nu \quad p'^\nu = (m, \mathbf{0})$$

$$s^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu s'^\nu \quad s'^\nu = (0, \boldsymbol{\xi})$$

$$u(p, s) = S(\Lambda) u(0, s')$$

- Vogliamo trovare un operatore che
 - Svolga il ruolo di $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \gamma^0$ nel sistema di riferimento K
 - Agisca direttamente sugli spinori $u(p, s)$ e $v(p, s)$
 - Abbia autovalori $+1$ e -1 uguali a quelli di $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\xi} \gamma^0$ nel sistema di riposo
- Cominciamo con scrivere in modo covariante l'operatore $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\xi} \gamma^0$ nel sistema K'
 - Abbiamo visto le seguenti espressioni di $\boldsymbol{\Sigma}$ (diapositiva 69)

$$\Sigma^j = \sigma^{kl} = i\gamma^k \gamma^l$$

$$\Sigma^j = -i\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^j$$

- Utilizzando l'ultima espressione

sottointesa la
somma su $j=1,2,3$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\xi} \gamma^0 = \xi^j \Sigma^j \gamma^0 = -i\xi^j \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^j \gamma^0 = -i\xi^j \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^j = -\xi^j \gamma^5 \gamma^j$$

Proiettori di spin

- Riepilogando ($j = 1, 2, 3$) $\xi \cdot \Sigma \gamma^0 = -\xi^j \gamma^5 \gamma^j$
 - Dal momento che nel sistema di riposo $s'^\nu = (0, \xi)$ possiamo scrivere

$$\xi \cdot \Sigma \gamma^0 = -\xi^j \gamma^5 \gamma^j = \gamma^5 s'_\nu \gamma^\nu = \gamma^5 \not{s}'$$

- Si può dimostrare che
 - L'operatore $\gamma^5 \not{s}'$ si trasforma nell'operatore $\gamma^5 \not{s}$
 - Vale a dire: l'operatore $\gamma^5 \not{s}$ applicato agli spinori u e v nel sistema K dà lo stesso risultato che $\gamma^5 \not{s}'$ dà nel sistema di riposo K'

$$\gamma^5 \not{s} u(p, \pm s) = \pm u(p, \pm s)$$

$$\gamma^5 \not{s} v(p, \pm s) = \pm v(p, \pm s)$$

- Abbiamo pertanto trovato l'operatore che applicato agli spinori di particelle in moto ci dice qual è lo spin nel sistema di riposo
- Ovviamente gli operatori

$$P_\Sigma(\pm s) = \frac{1 \pm \gamma^5 \not{s}}{2}$$

sono gli operatori di proiezione che cercavamo



Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

- Studiamo adesso eventuali effetti dovuti alla polarizzazione nella diffusione di Coulomb
 - Vedremo che la sezione d'urto non dipende dalla polarizzazione iniziale
 - Ricordiamo tuttavia che le formule sono approssimate al primo ordine
 - Vedremo che la sezione d'urto dipende dalla polarizzazione iniziale solo al secondo ordine
 - Utilizzeremo questo effetto per studiare la polarizzazione dell'elettrone nel decadimento beta

- Calcoliamo la sezione d'urto per un elettrone con polarizzazione iniziale s_i
 - Abbiamo visto che in questo caso il tensore $L^{\mu\nu}$ diventa

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- Sviluppando si ottiene

$$L^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right] + \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{\gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- Il primo termine è identico a quello del caso senza polarizzazione
- Sviluppando, il secondo termine diventa

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{s}_i \not{p}_i \gamma^\nu + m \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{s}_i \gamma^\nu + m \gamma^\mu \gamma_5 \not{s}_i \not{p}_i \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma_5 \not{s}_i \gamma^\nu \right]$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [\not{p}_f \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \not{p}_i \gamma^\nu + m \not{p}_f \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \gamma^\nu + m \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \not{p}_i \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \gamma^\nu]$$

- Analizziamo i vari termini

- Il primo e l'ultimo sono nulli

- Un numero dispari di matrici γ (γ^5 equivale a 4 matrici γ)

- Il secondo e il terzo sono diversi da zero.

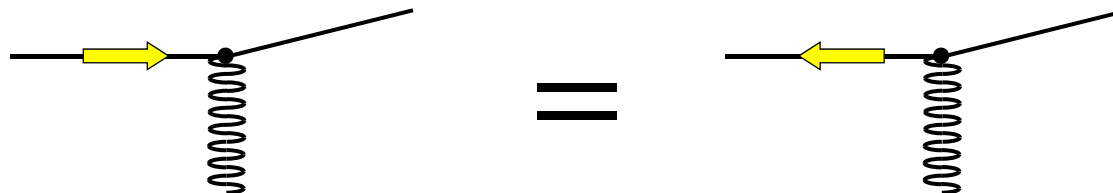
- Ad esempio

$$\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\text{Tr} [\not{p}_f \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \gamma^\nu] = p_{f\rho} s_{i\sigma} \text{Tr} [\cancel{\gamma_5} \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4ip_{f\rho} s_{i\sigma} \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu}$$

- Tuttavia, nella diffusione Coulombiana il campo elettrostatico fa sopravvivere solo il termine $\mu = \nu = 0$ e pertanto il termine è nullo (antisimmetria di $\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu}$)

- Concludiamo che, al primo ordine, la sezione d'urto non dipende dalla polarizzazione iniziale



Tracce con la matrice γ^5

- Riportiamo alcune tracce che coinvolgono la matrice $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

- Innanzitutto $Tr[\gamma^5] = 0$

- Infatti γ^5 contiene tutte e 4 le matrici γ
- La traccia di 4 matrici γ porta ad una espressione che contiene tre tensori $g^{\mu\nu}$ con indici tutti differenti e quindi il risultato è zero

- Inoltre $Tr[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = 0$

- Se $\mu = \nu$ rimane la traccia di γ^5 e quindi il risultato è zero
- Se $\mu \neq \nu$ allora con opportune commutazioni possono essere portate adiacenti alle corrispondenti matrici in γ^5
 - Il prodotto è ± 1 e si eliminano quindi 2 matrici γ
- Rimane la traccia di 2 matrici con indici differenti quindi nulla

- Per finire $Tr[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1$$

- Innanzitutto i 4 indici devono essere tutti differenti altrimenti, con opportune commutazioni, si ritorna ai casi precedente

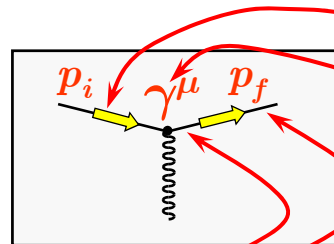
e permutazioni ...

$$4 = Tr[I] = Tr[\gamma^5\gamma^5] = Tr[\gamma^5 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] \quad Tr[\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = -4i = 4i\varepsilon^{0123}$$



Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

- Generalizziamo le regole per scrivere l'elemento di matrice direttamente dal diagramma di Feynman (diapositiva [116](#)) al caso in cui i fermioni iniziale e finale siano polarizzati
- Si percorre da destra a sinistra il diagramma
 - Stato finale con polarizzazione s_f $\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_f}{2} (\not{p}_f + m)$
 - Vertice (interazione vettoriale) γ^μ
 - Stato iniziale con polarizzazione s_i $\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m)$
 - Vertice γ^ν



$$L^{\mu\nu} = Tr \left[\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

- Calcoliamo adesso la polarizzazione dello stato finale per una data polarizzazione dello stato iniziale

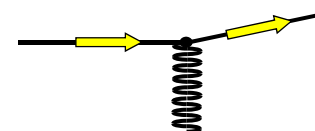
- In generale la polarizzazione è data da

$$\mathcal{P} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

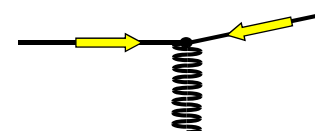
- Le quantità N_+ e N_- sono il numero di particelle con polarizzazione rispettivamente parallela o antiparallela all'asse di quantizzazione

- Il numero di interazioni è proporzionale al modulo quadrato dell'elemento di matrice

$$N_+ \propto \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma_5 \not{s}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$



$$N_- \propto \text{Tr} \left[\frac{1 - \gamma_5 \not{s}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$



- È evidente che nella somma $N_+ + N_-$ la dipendenza da s_f si cancella
- Nel denominatore rimane solo la dipendenza da s_i
- Abbiamo visto nello scattering Coulombiano che $\gamma_5 \not{s}$ non contribuisce
- Il risultato è (diapositiva 115)

$$N_+ + N_- \propto L^{00} = 4 \left[E^2 - \mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 4 \left[E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

$$N_+ \propto \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma_5 \not{p}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{p}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right] \quad N_- \propto \text{Tr} \left[\frac{1 - \gamma_5 \not{p}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{p}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- **Valutiamo adesso il numeratore**

- **Notiamo che i termini $1 \pm \gamma_5 \not{p}_f$ danno origine alle espressioni**

$$\frac{1}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{p}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \quad \pm \frac{\gamma_5 \not{p}_f}{2} (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{p}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu$$

- **Nell'espressione $N_+ - N_-$ la prima espressione si elide**

- **Pertanto sopravvive solo**

$$N_+ - N_- \propto \text{Tr} \left[\gamma_5 \not{p}_f (\not{p}_f + m) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5 \not{p}_i}{2} (\not{p}_i + m) \gamma^\nu \right]$$

- **Sviluppando l'espressione**

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu) (1 + \gamma_5 \not{p}_i) (\not{p}_i \gamma^\nu + m \gamma^\nu) \right]$$

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{aligned} &\gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu m \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i m \gamma^\nu + \\ &\gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu m \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i m \gamma^\nu \end{aligned} \right]$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{array}{l} \cancel{\gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu} + \cancel{\gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu m \gamma^\nu} + \gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i m \gamma^\nu + \\ \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu m \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i m \gamma^\nu \end{array} \right]$$

- L'espressione trovata è più semplice di quanto appaia a prima vista
 - Analizziamo i vari termini nell'ordine
 - 1. Nullo: numero dispari di matrici γ
 - 2. Non contribuisce: la traccia è proporzionale a $\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$ che è 0 per $\mu = \nu$
 - 3. Da calcolare
 - 4. Nullo: numero dispari di matrici γ
 - 5. Come il punto 2
 - 6. Nullo: numero dispari di matrici γ
 - 7. Nullo: numero dispari di matrici γ
 - 8. Da calcolare
 - Pertanto sopravvivono solo due termini

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma_5 \not{p}_f \not{p}_f \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i \not{p}_i \gamma^\nu + \gamma_5 \not{p}_f m \gamma^\mu \gamma_5 \not{p}_i m \gamma^\nu \right]$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\cancel{\gamma_5} \cancel{s_f} \not{p}_f \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \cancel{s_i} \not{p}_i \gamma^\nu + m^2 \cancel{\gamma_5} \cancel{s_f} \gamma^\mu \cancel{\gamma_5} \cancel{s_i} \gamma^\nu \right]$$

- Le matrici γ^5 possono essere eliminate con opportune commutazioni

$$N_+ - N_- \propto \frac{1}{2} \text{Tr} \left[+m^2 \cancel{s_f} \gamma^\mu \cancel{s_i} \gamma^\nu - \cancel{s_f} \not{p}_f \gamma^\mu \cancel{s_i} \not{p}_i \gamma^\nu \right]$$

- Il primo termine è del tipo già visto

$$\text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4 (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} s_{f\rho} s_{i\sigma} \text{Tr} [\cancel{\gamma}^\rho \gamma^\mu \cancel{\gamma}^\sigma \gamma^\nu] &= 4 s_{f\rho} s_{i\sigma} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}) \\ &= 4 (s_f^\mu s_i^\nu + s_f^\nu s_i^\mu - s_f \cdot s_i g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

- Per il secondo termine occorre una nuova regola

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}] &= \\ &= g^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr} [\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}] - g^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr} [\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] + \dots + g^{\mu_1 \mu_n} \text{Tr} [\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}] \end{aligned}$$

- Lo sviluppo dell'espressione è lasciato come esercizio

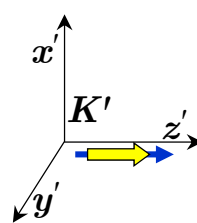
- Per il risultato finale occorre inoltre definire i vettori di spin s_i e s_f

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

- Definiamo i vettori di polarizzazione utilizzando le proiezioni lungo p_i e p_f
 - Ricordiamo la definizione del vettore s (diapositiva 78)

$$s^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \xi_{||} \quad s_{\perp} = \xi_{\perp} \quad s_{||} = \frac{E}{m} \xi_{||}$$

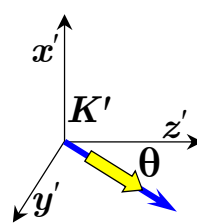
- Per la particella nello stato iniziale quantizziamo lo spin nella direzione del momento incidente



$$s^0 = \frac{|\mathbf{p}_i|}{m} \xi_{||} = \frac{|\mathbf{p}_i|}{m} s_{||} = \frac{E_i}{m} \xi_{||} = \frac{E_i}{m} \quad s_i^{\mu} = \left(\frac{|\mathbf{p}_i|}{m}, 0, 0, \frac{E_i}{m} \right)$$

$$s_i^{\mu} = \left(-\frac{|\mathbf{p}_i|}{m}, 0, 0, -\frac{E_i}{m} \right)$$

- Per la particella nello stato finale quantizziamo lo spin nella direzione del momento uscente



$$s_f^{\mu} = \left(\frac{|\mathbf{p}_f|}{m}, 0, \frac{E_f}{m} \sin \theta, \frac{E_f}{m} \cos \theta \right)$$

$$p_f^{\mu} = (E_f, 0, |\mathbf{p}_f| \sin \theta, |\mathbf{p}_f| \cos \theta)$$

Polarizzazione nella diffusione di Coulomb

- Utilizzando le formule ricavate e i vettori polarizzazione s il risultato è

$$\mathcal{P} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

$$\mathcal{P} = 1 - \frac{2m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

- L'interpretazione di questo risultato è la seguente
 - Lo stato iniziale è completamente polarizzato (dato del problema)
 - Abbiamo scelto polarizzazione lungo p (elicità Right-Handed)
 - Lo stato finale ha una polarizzazione che dipende dall'angolo
 - La probabilità relativa di uno stato finale Right-Handed o di uno stato Left-Handed dipende dall'angolo
 - Alcuni casi notevoli

- $\theta = 0 \rightarrow \mathcal{P} = 1$

- $\theta = \pi \rightarrow \mathcal{P} = -1$

- $\beta \ll 1 \quad (E \rightarrow m) \quad \mathcal{P} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$

- $\beta \rightarrow 1 \quad (E \gg m) \quad \mathcal{P} = 1$

Proiezione di ξ lungo p_f

conservazione spin

conservazione elicità

Conservazione dell'elicità

- Quando la particella è ultra-relativistica il 4-vettore di spin assume una forma limite interessante

- Consideriamo lo spin nella direzione del momento $\rightarrow \xi_{||} = 1 \quad \xi_{\perp} = 0$

$$s^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \xi_{||} \quad s_{||} = \frac{E}{m} \xi_{||} \quad \boxed{s^{\mu} = \frac{1}{m} (|\mathbf{p}|, 0, 0, E)}$$

$$p^{\mu} = (E, 0, 0, |\mathbf{p}|)$$

- Dal momento che $|\mathbf{p}| \rightarrow E$ 

$$\boxed{s^{\mu} \rightarrow \frac{1}{m} p^{\mu}}$$

- Ricordiamo l'espressione dei proiettori di spin

$$\boxed{P_{\Sigma}(\pm s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{s}}{2}}$$

- Pertanto nel caso ultra-relativistico

$$\gamma_5 \not{s} u(p, s) \rightarrow \gamma_5 \frac{\not{p}}{m} u(p, s) \quad \text{ricordiamo l'equazione di Dirac} \quad (\not{p} - m)u = 0$$

$$\gamma_5 \not{s} u(p, s) \rightarrow \gamma_5 u(p, s)$$

Proiettore di chiralità

$$\boxed{P_{\Sigma}(\pm s) \rightarrow \frac{1 \pm \gamma_5}{2}}$$

**Nel caso ultrarelativistico
proiezione di spin e proiezione
chirale coincidono**

- Pertanto nel caso ultra-relativistico
gli operatori di proiezione acquistano la forma indicata che contiene solo γ^5

Conservazione dell'elicità

- Pertanto nel caso ultra-relativistico, dato uno spinore con polarizzazione arbitraria u possiamo scomporlo nei due stati di polarizzazione usando $(1 \pm \gamma^5)/2$

- Polarizzazione Right-Handed

$$u_+ \approx \frac{1 + \gamma_5}{2} u$$

- Polarizzazione Left-Handed

$$u_- \approx \frac{1 - \gamma_5}{2} u$$

- Ovviamente

$$u_+ + u_- = u$$

- Calcoliamo anche gli aggiunti spinoriali delle due componenti

- Preliminarmente osserviamo che

$$\bar{\gamma}_5 = \gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma_5 = -\gamma_5$$

$$\bar{\gamma}_5 = -\gamma_5$$

- Veniamo agli aggiunti spinoriali delle proiezioni

$$\bar{u}_+ = \overline{\frac{1 + \gamma_5}{2} u} = \bar{u} \frac{1 + \bar{\gamma}_5}{2} = \bar{u} \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

- Analogamente per u_-

$$\bar{u}_+ = \bar{u} \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

$$\bar{u}_- = \bar{u} \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

Conservazione dell'elicità

- Siamo adesso in grado di verificare che nel caso ultra-relativistico nel caso di una corrente vettoriale l'elicità è conservata
 - L'ampiezza per la transizione $- \rightarrow +$ è proporzionale all'elemento di matrice

$$\bar{u}_+ \gamma^\mu u_- = \bar{u} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) u = \frac{1}{4} \bar{u} (1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) \gamma^\mu u = \frac{1}{4} \bar{u} [1 - (\gamma_5)^2] \gamma^\mu u$$

$$\bar{u}_+ \gamma^\mu u_- = 0$$

- Analogamente

$$\bar{u}_- \gamma^\mu u_+ = 0$$

- Sono invece diversi da zero gli elementi di matrice fra stati con la stessa elicità

$$\begin{aligned} \bar{u}_+ \gamma^\mu u_+ &= \bar{u} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) u = \frac{1}{4} \bar{u} (1 - \gamma_5)(1 - \gamma_5) \gamma^\mu u \\ &= \frac{1}{4} \bar{u} [1 + 2\gamma_5 + (\gamma_5)^2] \gamma^\mu u = \frac{1}{2} \bar{u} [1 + \gamma_5] \gamma^\mu u \neq 0 \end{aligned}$$