
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 3

4.10.2022

Equazione di Dirac 2
Invarianza relativistica
Descrizione relativistica dello spin
Elicità

anno accademico 2022-2023

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- Nel caso dell'equazione di Klein-Gordon avevamo visto che l'invarianza per trasformazioni di Lorentz si esprimeva nel seguente modo
 - Se ϕ soddisfa l'equazione $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0$
 - Allora la funzione definita da $\phi'(x') = \phi(x)$ $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
 - Soddisfa l'equazione $(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2)\phi'(x') = 0$
- Nel caso dell'equazione di Dirac si ha una situazione simile con una complicazione
 - La funzione d'onda $\psi(x)$ ha 4 componenti e una trasformazione di Lorentz modifica anche le componenti
 - Facciamo il parallelo con una rotazione nel caso di un campo vettoriale $F(r)$
 - La rotazione modifica le componenti del punto $r' = \hat{R} r$
 - La rotazione modifica anche le componenti del campo vettoriale $F'(r') = \hat{R} F(r)$
- Nel caso del campo spinoriale è fondamentale ricordare che lo spinore è una grandezza matematica differente da un 4-vettore
 - Occorre trovare la legge di trasformazione degli spinori (che non è Λ)

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- Come nel caso delle rotazioni o delle trasformazioni di Lorentz **assumiamo**

- La legge di trasformazione degli spinori è lineare
- Ad ogni trasformazione di Lorentz Λ corrisponde una trasformazione spinoriale $S(\Lambda)$ che permette di calcolare lo spinore in K'

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$$

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- Vediamo adesso le proprietà fondamentali di $S(\Lambda)$

- Lo spinore trasformato deve soddisfare l'equazione di Dirac nel sistema K'

sono le **stesse** matrici γ^{μ} del sistema K

$$(i\gamma^{\mu} \partial'_{\mu} - m) \psi'(x') = 0$$

$$\partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

- Sostituendo $\psi'(x') = S\psi(x)$ e $\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \partial_{\alpha}$ otteniamo

$$(i\gamma^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \partial_{\alpha} - m) S\psi(x) = 0$$

- Moltiplichiamo da sinistra per S^{-1}

$$(iS^{-1}\gamma^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\alpha} S \partial_{\alpha} - mS^{-1}S) \psi(x) = 0$$

$$[i(S^{-1}\gamma^{\mu} S \Lambda_{\mu}^{\alpha}) \partial_{\alpha} - m] \psi(x) = 0$$

- L'equazione è identica all'equazione di Dirac se

$$S^{-1}\gamma^{\mu} S \Lambda_{\mu}^{\alpha} = \gamma^{\alpha}$$

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- Possiamo ulteriormente trasformare la relazione $S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda_\mu^\alpha = \gamma^\alpha$ moltiplicando per Λ^ν_α e sommando su α

$$S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda^\nu_\alpha\Lambda_\mu^\alpha = \Lambda^\nu_\alpha\gamma^\alpha$$

$$S^{-1}\gamma^\mu S\delta^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\alpha\gamma^\alpha$$

$$S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda^\nu_\alpha\gamma^\alpha$$

- A prima vista l'equazione trovata sembrerebbe indicare che le matrici γ^μ si trasformano come un 4-vettore $\rightarrow$ NO, falso
 - Infatti sottolineiamo che la condizione $S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda_\mu^\alpha = \gamma^\alpha$ deriva dalla richiesta che le matrici γ nelle equazioni nei sistemi K e K' siano le stesse
- Tuttavia la legge di trasformazione trovata ci permetterà di dimostrare che quantità costruite con le matrici γ^μ (ad esempio la corrente $j^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) si trasformano come 4-vettori
- A questo punto la dimostrazione dell'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac procede dimostrando, per costruzione, l'esistenza di $S(\Lambda)$
 - Non esporremo la procedura dettagliata
 - Ricorderemo solo
 - L'espressione di una trasformazione di Lorentz (per i 4-vettori) a partire dai generatori
 - L'espressione di una trasformazione di Lorentz (per gli spinori) a partire dai generatori

Trasformazioni di Lorentz

- Una trasformazione di Lorentz dipende da 6 parametri
 - 3 parametri **descrivono un boost in una data direzione**
 - 3 parametri **descrivono una possibile rotazione**
- I 6 parametri possono essere espressi tramite la quantità antisimmetrica $a_{\alpha\beta}$
 - **Esplicitamente, l'antisimmetria implica** $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$; $a_{\alpha\alpha} = 0$
- La trasformazione si esprime in funzione dei generatori[†] $M^{\alpha\beta}$

$$\Lambda = \exp \left[-\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \right]$$

- I generatori hanno la forma

$$(M^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = g^\alpha_\mu g^\beta_\nu - g^\beta_\mu g^\alpha_\nu$$

- Per trasformazioni di Lorentz che sono dei boost puri i 3 generatori sono

$$\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \quad K_1 = M^{01} \quad K_2 = M^{02} \quad K_3 = M^{03}$$

- I 3 parametri rilevanti $a_{\mu\nu}$ possono essere scritti come $\xi = \hat{\beta} \tanh^{-1} \beta$

- La trasformazione di Lorentz è

$$\Lambda = \exp[-\xi \cdot \mathbf{K}]$$

- [†]vedi per esempio (attenzione alle differenti convenzioni e segni)
 - J. Jackson - Classical Electrodynamics, 3d ed. - cap. 11
 - Hitoshi Murayama - lecture notes on Lorentz Group and Lorentz Invariance



Generatori trasformazioni di Lorentz

- Generatori dei boost

$$(M^{01})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (M^{02})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (M^{03})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Generatori delle rotazioni

$$(M^{23})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (M^{13})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (M^{12})_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Generatori trasformazioni di Lorentz

- Quando i generatori vengono usati per costruire le matrici di Lorentz si utilizzano gli indici nella forma $\Lambda^\mu{}_\nu$

- Alzando l'indice μ
- Generatori dei boost

$$K_1 = (M^{01})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = (M^{02})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_3 = (M^{03})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Generatori delle rotazioni

$$L_1 = (M^{23})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 = (M^{13})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 = (M^{12})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Si può dimostrare che un operatore $S(\Lambda)$ che soddisfa alle richieste che abbiamo fatto per garantire l'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac è dato da una formula analoga

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4} a_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right]$$

- I generatori sono espressi in funzione delle matrici γ

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

- I coefficienti $a_{\mu\nu}$ che compaiono nella formula sono gli stessi che compaiono nella formula della trasformazione di Lorentz Λ
- Per trasformazioni che sono dei boost puri i 3 generatori sono

$$B_1 = \sigma^{01} \quad B_2 = \sigma^{02} \quad B_3 = \sigma^{03}$$

- In particolare

$$\sigma^{01} = \frac{i}{2}(\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) = \frac{i}{2}(\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^0 \gamma^1) = i\gamma^0 \gamma^1 = i\alpha_1$$

- e analoghe per $j = 2, 3$
- Inserendo nella formula per $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] = \exp\left[\frac{1}{2} \gamma^0 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\gamma}\right]$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\beta}} \tanh^{-1} \beta$$



Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Osserviamo che la matrice $S(\Lambda)$ non è unitaria

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right]$$

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}a_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]$$

- Infatti

- Anche se le matrici α sono hermitiane manca la costante i nell'esponente

- Nella seconda forma notiamo che gli operatori $\sigma^{\mu\nu}$ non sono hermitiani

- Pertanto

$$S^{-1}(\Lambda) = \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] \neq S^\dagger(\Lambda) = \left(\exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right]\right)^\dagger = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right]$$

- Ricordiamo che $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

- Di conseguenza $(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0$

- Solo le componenti spaziali ($j, k = 1, 3$) sono hermitiane $(\sigma^{jk})^\dagger = \sigma^{jk}$

- Per le componenti con un indice temporale ($\mu = 0, k = 1, 3$) vale

$$(\sigma^{0k})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{0k} \gamma^0 = -\sigma^{0k}$$

- Poiché questa relazione vale per ogni potenza di $\sigma^{\mu\nu}$ nello sviluppo dell'esponenziale avremo anche (per i boost)

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \overline{S(\Lambda)}$$



Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Le informazioni e il formalismo delle precedenti diapositive sono sufficienti per costruire esplicitamente una trasformazione di Lorentz Λ e la trasformazione spinoriale ad essa associata $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(I + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right)$$

- L'espressione riportata è indipendente dalla rappresentazione
- Nella rappresentazione di Pauli-Dirac si ottiene

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[I + \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} I & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} & I \end{pmatrix}$$

- Notiamo incidentalmente che l'applicazione dell'operatore $S(\Lambda)$ agli spinori $w(0,r)$, $r=1,4$ (v. dia. 36 e 2 seguenti) produce gli spinori $u(\mathbf{p},r)$ e $v(\mathbf{p},r)$

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Per le rotazioni i 3 generatori sono

$$\Sigma_1 = i\gamma^2\gamma^3 \quad \Sigma_2 = i\gamma^3\gamma^1 \quad \Sigma_3 = i\gamma^1\gamma^2$$

$$\Sigma^j = \frac{i}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \gamma^k \gamma^l$$

- Si può dimostrare che, indipendentemente dalla rappresentazione, queste matrici sono hermitiane e hanno le stesse regole di commutazione e anticommutazione delle matrici di Pauli

$$\{\Sigma_k, \Sigma_l\} = 2I\delta_{kl} \quad [\Sigma_k, \Sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\Sigma_m \quad \Sigma_k^2 = I$$

- L'operatore di rotazione è

$$S(R) = \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\right]$$

- Dato che gli operatori Σ_k sono hermitiani la matrice $S(R)$ è unitaria

$$S^\dagger(R) = \left(\exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\right]\right)^\dagger = \exp\left[+\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^\dagger\right] = S^{-1}(\Lambda)$$

- D'altro canto per ogni potenza di Σ vale

$$\gamma^0 \Sigma^k \gamma^0 = \Sigma^k$$

- Anche per una rotazione si può quindi scrivere

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \overline{S(\Lambda)}$$



Momento angolare

- Abbiamo visto che l'equazione di Dirac ha 4 soluzioni
 - Due soluzioni con energia positiva
 - Due soluzioni con energia negativa
- Per interpretare le soluzioni ad energia negativa bisogna utilizzare la teoria delle buche (holes) di Dirac oppure (preferibile) la seconda quantizzazione
 - All'interno di ciascuna tipologia di soluzioni occorre interpretare la molteplicità 2 delle soluzioni
 - Possiamo intuire che ciò ha a che fare con lo spin delle particelle
- Una discussione (intuitiva) molto semplice si può fare nel sistema di riposo della particella
 - In questo sistema le equazioni di Dirac per gli spinori sono

$$\psi(x) = \begin{cases} u(0, r) e^{-imt} \\ v(0, r) e^{+imt} \end{cases}$$

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad m\gamma^0 u = mu$$

$$(\not{p} + m)v = 0 \quad m\gamma^0 v = -mv$$

- Nella rappresentazione di Pauli-Dirac sappiamo che le soluzioni sono

$$u(\mathbf{0}, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(\mathbf{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{0}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{0}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Momento angolare

- Le soluzioni sono autovettori di γ^0

- Due con autovalore $+1$
- Due con autovalore -1

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Per differenziare ulteriormente occorre introdurre un operatore che commuti con γ^0

- Una possibilità è l'operatore Σ_z

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Ovviamente $[\gamma^0, \Sigma_z] = 0$

- Abbiamo

$$\Sigma_z u(0,1) = u(0,1) \quad \Sigma_z u(0,2) = -u(0,2)$$

$$\Sigma_z v(0,1) = v(0,1) \quad \Sigma_z v(0,2) = -v(0,2)$$

- Inoltre le componenti dell'operatore vettoriale Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

- Hanno le regole di commutazione del momento angolare

- Identifichiamo $\frac{1}{2}\Sigma$ con lo spin della particella

Interpretazione fisica
(holes di Dirac)

- Gli spinori $u(0,1)$ e $v(0,2)$ corrispondono a spin up $(+1/2 \text{ lungo l'asse } z)$
- Gli spinori $u(0,2)$ e $v(0,1)$ corrispondono a spin down $(-1/2 \text{ lungo l'asse } z)$

- Purtroppo ciò funziona solo nel sistema di riposo della particella ($p = 0$)

Momento angolare

- Infatti, in un sistema inerziale arbitrario
 - L'operatore di spin che abbiamo definito non commuta con l'Hamiltoniana
 - Neppure il momento angolare orbitale commuta con l'Hamiltoniana
- Ricordiamo l'equazione di Dirac in forma Hamiltoniana

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = [-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m] \psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m] \psi = H \psi$$

- Calcoliamo il commutatore dell'Hamiltoniana con il momento angolare orbitale

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad L_j = \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} r^k p^l$$

- Abbiamo

$$\begin{aligned} [H, L_j] &= \left[\sum_n \alpha^n p^n + \beta m, \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} r^k p^l \right] = \sum_{kln} [\alpha^n p^n, \varepsilon_{jkl} r^k p^l] = \sum_{kln} \alpha^n \varepsilon_{jkl} [p^n, r^k] p^l \\ &= \sum_{kln} \varepsilon_{jkl} \alpha^n (-i \delta^{nk}) p^l = -i \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \alpha^k p^l = -i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})_j \end{aligned}$$


$$[H, \mathbf{L}] = -i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})$$

- La conclusione è che il momento angolare orbitale non si conserva, neppure durante il moto di una particella libera

Operatore di spin

- L'operatore di spin che abbiamo introdotto precedentemente è valido solo nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

- In una rappresentazione arbitraria l'operatore di spin si trova a partire dai generatori delle rotazioni per gli spinori ($j, k = 1, 2, 3$)

$$\sigma^{kl} = \frac{i}{2}(\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k) = \frac{i}{2}[\gamma^k, \gamma^l]$$

- In particolare si ha $S = \frac{1}{2} \Sigma$ con Σ^j (j, k, l una permutazione pari di 123)

$$\Sigma^j = \sigma^{kl} = i\gamma^k \gamma^l$$

- Un modo equivalente per scrivere l'operatore di spin è

$$\Sigma^j = \frac{i}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \gamma^k \gamma^l$$

- Naturalmente, non confondere il simbolo di somma con l'operatore Σ

Operatore di spin

- Un'altra espressione per Σ , che sarà molto utile in seguito, parte dall'espressione

$$\Sigma^j = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j$$

- Infatti utilizzando le regole di commutazione delle matrici γ e ricordando che $(\gamma^j)^2 = -1$ per $j = 1, 2, 3$ si ritrova la definizione precedente
- Elaborando ulteriormente

$$\Sigma^j = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j\gamma^0\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j\gamma^0$$

- Introduciamo la matrice $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
- Arriviamo alla definizione

$$\Sigma = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$$

- La matrice γ^5 è molto importante nella teoria degli spinori
- Nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \gamma^5\boldsymbol{\alpha}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Proprietà dei commutatori

- **Prima proprietà**

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - \textcolor{red}{ACB} + \textcolor{red}{ACB} - CAB$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

- **Analogamente**

$$[C, AB] = CAB - ABC = CAB - \textcolor{red}{ACB} + \textcolor{red}{ACB} - ABC$$

$$[C, AB] = [C, A]B + A[C, B]$$

- **Pertanto**

$$[A, C] = 0 \rightarrow [AB, C] = \textcolor{red}{A}[B, C]$$

$$[C, B] = 0 \rightarrow [C, AB] = [C, A]\textcolor{red}{B}$$

- **Seconda proprietà**

$$[A, BC] = ABC - BCA = ABC + \textcolor{red}{BAC} - \textcolor{red}{BAC} - BCA$$

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

- **Analogamente**

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$



Momento angolare

- Abbiamo adesso tutti gli ingredienti per calcolare il commutatore $[H, \Sigma]$ indipendentemente dalla rappresentazione

- Riscriviamo l'Hamiltoniana utilizzando le matrici γ

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 m = \gamma^0 \left(\sum_n \gamma^n p^n + m \right)$$

- Calcoliamo

$$[H, \Sigma_j] = \left[\underbrace{\gamma^0}_{A} \left(\underbrace{\sum_n \gamma^n p^n}_B + \underbrace{m}_C \right), \frac{1}{2} i \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \underbrace{\gamma^k \gamma^l}_C \right]$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[(\gamma^k \gamma^l), \gamma^0] = \gamma^k \gamma^l \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^k \gamma^l = 0$$

$$[A, C] = 0$$

$$[X, mI] = 0$$

$$= \frac{1}{2} i \gamma^0 \left[\left(\sum_n \gamma^n p^n + \textcircled{m} \right), \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \gamma^k \gamma^l \right]$$

$$= \frac{1}{2} i \gamma^0 \sum_{nkl} [\gamma^n p^n, \varepsilon_{jkl} \gamma^k \gamma^l] = \frac{1}{2} i \gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} [\gamma^n, \gamma^k \gamma^l] p^n$$

- Inoltre

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

$$[\gamma^n, \gamma^k \gamma^l] = \{\gamma^n, \gamma^k\} \gamma^l - \gamma^k \{\gamma^n, \gamma^l\} = 2g^{nk} \gamma^l - 2g^{nl} \gamma^k$$

Momento angolare

- Riepiloghiamo i risultati fino a questo punto

$$[H, \Sigma_j] = \frac{1}{2} i \gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} [\gamma^n, \gamma^k \gamma^l] p^n \quad [\gamma^n, \gamma^k \gamma^l] = 2g^{nk} \gamma^l - 2g^{nl} \gamma^k$$

- Sostituendo otteniamo

$$\text{per } n, k = 1, 2, 3 \quad g^{nk} = -\delta^{nk}$$

$$\begin{aligned} [H, \Sigma_j] &= \frac{1}{2} i \gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} (2g^{nk} \gamma^l - 2g^{nl} \gamma^k) p^n = i \gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} (g^{nk} \gamma^l - g^{nl} \gamma^k) p^n \\ &= i \gamma^0 \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} (-\gamma^l p^k + \gamma^k p^l) = 2i \gamma^0 \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \gamma^k p^l = 2i \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \alpha^k p^l = 2i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})_j \end{aligned}$$

- Concludendo

$$[H, \boldsymbol{\Sigma}] = 2i \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}$$

- Pertanto neppure lo spin ($S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}$) si conserva
- Tuttavia l'operatore momento angolare totale $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}$ commuta con l'Hamiltoniana (come deve essere)

$$[H, \mathbf{J}] = [H, \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}] = [H, \mathbf{L}] + [H, \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}]$$

$$[H, \mathbf{J}] = -i \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} + i \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}$$

$$[H, \mathbf{J}] = 0$$

Momento angolare

- Dal momento che l'operatore di spin $\frac{1}{2}\Sigma$ non commuta con H non è possibile utilizzare i suoi autovalori per classificare gli stati
- Si utilizzano due alternative
 - Proiezione dello spin lungo la direzione di moto: Elicità
 - Per particelle con massa non nulla: Direzione dello spin nel sistema di riposo
 - Nel sistema di riposo vale la trattazione non relativistica

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- Ricordiamo che $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{1}{2}\Sigma$ $[H, \mathbf{J}] = 0$
 - Evidentemente, dato che $[H, \mathbf{p}] = 0$ $[H, \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}] = 0$
 - Abbiamo inoltre
$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}\Sigma \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2}\Sigma \cdot \mathbf{p}$$
 - Pertanto commuta con l'Hamiltoniana anche l'operatore elicità

$$h(\mathbf{p}) = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- Ricordiamo alcuni risultati ottenuti utilizzando la rappresentazione di Dirac

$$u(\mathbf{p}, r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{p}) = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$$

- Ricordiamo che le funzioni ϕ_r sono due arbitrari spinori bidimensionali

- L'operatore $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ha due autovettori $\phi_{\pm}$ $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi_{\pm} = \pm \phi_{\pm}$

- Utilizzando questi spinori $u(\mathbf{p}, \pm) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \frac{\pm |\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_{\pm} \end{pmatrix}$

- Applicando l'operatore $h(\mathbf{p})$ agli spinori $u(\mathbf{p}, \pm)$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_+ \end{pmatrix}$$

$$h(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, +) = u(\mathbf{p}, +)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_- \\ \frac{-|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_- \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi_- \\ \frac{-|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_- \end{pmatrix}$$

$$h(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, -) = -u(\mathbf{p}, -)$$

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- Il vantaggio di questa classificazione risiede nel fatto che $[H, h(p)] = 0$
 - L'autovalore dell'elicità $\lambda = \pm 1$ si conserva
 - Può essere utilizzata anche per particelle di massa nulla
- Ovviamente l'espressione esplicita di $h(p)$ che abbiamo trovato vale solamente per la rappresentazione di Dirac
 - In altre rappresentazioni l'espressione di $h(p)$ e di $u(p)$ sarà differente
 - Occorre trovare la soluzione dell'equazione agli autovalori $\Sigma \cdot \hat{n} u = \pm u$
- Quanto detto fin qui vale anche per gli spinori v
- Nel caso della rappresentazione di Dirac osserviamo
 - Gli spinori $\phi_{\pm}$ sono spinori bidimensionali non relativistici
 - Rappresentano gli autostati dell'operatore di spin non relativistico quantizzato lungo l'asse $\hat{n}$
 - La loro espressione esplicita può essere trovata
 - Ruotando gli autostati ϕ_r ($r = 1, 2$) che sono gli autostati di σ_z
 - Risolvendo esplicitamente l'equazione matriciale $\sigma \cdot \hat{n} \phi_{\pm} = \pm \phi_{\pm}$

$$\sigma \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- Un altro metodo per descrivere lo spin fa riferimento al sistema inerziale in cui la particella è a riposo
 - Rest Frame: possibile solo per particelle con massa $\neq 0$
- Nel sistema di riposo della particella l'Hamiltoniana H commuta con l'operatore di spin Σ
 - Gli spinori possono essere anche autostati di Σ
 - La trattazione coincide con quella non relativistica
 - È possibile preparare uno stato ϕ_ξ polarizzato in una direzione arbitraria $\hat{\xi}$

$$\xi = \langle \phi_\xi | \sigma | \phi_\xi \rangle$$

- Ad esempio, nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$w(0, \xi) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \phi_\xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma \cdot \hat{\xi} w = \lambda w$$

- A questo punto si può applicare una trasformazione di Lorentz che trasforma lo spinore $w(0, \xi)$
 - Dal sistema in cui la particella è a riposo $p^\nu = (m, 0)$
 - Al sistema in cui la particella ha un 4-momento $p^\nu = (E, \mathbf{p})$

$$p^\nu = \Lambda^\nu_\mu p'^\mu$$

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- Ovviamente, in questo modo, abbiamo una complicazione
 - Il 4-momento p della particella è definito nel sistema di laboratorio K
 - Lo spin è definito nel sistema di riposo della particella K'
- Si introduce pertanto un 4-vettore s per la descrizione dello spin
 - Nel sistema di riposo della particella

$$s' = (0, \xi) \quad s' \cdot s' = -\xi \cdot \xi = -1$$

- Notiamo che si tratta di un 4-vettore a modulo negativo (space-like)

- Inoltre nel sistema di riposo abbiamo

$$p' = (m, 0) \quad p' \cdot s' = m \cdot 0 - 0 \cdot \xi = 0$$

- La relazione $s' \cdot p' = 0$ è invariante e vale in tutti i sistemi di riferimento
- Si passa al sistema K mediante una trasformazione Lorentz

$$(m, 0) \rightarrow (E, \mathbf{p}) \quad p^\nu = \Lambda^\nu_\mu p'^\mu$$

$$(0, \xi) \rightarrow (s^0, \vec{s}) \quad s^\nu = \Lambda^\nu_\mu s'^\mu$$

- Attenzione: nel sistema di laboratorio K la parte spaziale di s

NON È IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLO SPIN

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- In forma esplicita, le componenti di s nel sistema K in cui la particella di massa m ha energia E e momento p sono^{†§}

$$s^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \xi_{||} \quad s_{\perp} = \xi_{\perp} \quad s_{||} = \frac{E}{m} \xi_{||}$$

- Evidentemente $\xi_{||}$ e $\xi_{\perp}$ sono rispettivamente la componente parallela e perpendicolare alla direzione della quantità di moto
- In forma vettoriale le relazioni precedenti si possono esprimere come

$$s^0 = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}}{m} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\xi} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi})}{m(E + m)} \mathbf{p} \quad s^2 = \xi^2 + \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi})^2}{m^2}$$

- Notiamo che se la polarizzazione della particella nel suo sistema di riposo è $-\xi$ nel sistema di laboratorio le 4 componenti di s^{μ} cambiano tutte di segno rispetto a quelle corrispondenti a $+\xi$
- Quando si utilizza il 4-vettore s^{μ} gli spinori u e v si scrivono

$$u(\mathbf{p}, s) \quad v(\mathbf{p}, s)$$

- In queste formule s non è un indice ma un 4-vettore
- I due stati di polarizzazione sono $\pm s = \pm s^{\mu}$

- [†]Landau L, Lifshitz E, Pitaevskii L - Quantum Electrodynamics - Pergamon 1982 - cap III, § 29 pag. 106
- [§]Questo formalismo si applica anche a particelle di spin intero



Relazioni di completezza

- Abbiamo visto che nel sistema di riposo l'equazione di Dirac si riduce a

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi = m\psi \quad \psi = w e^{-ip_0 t} \quad \gamma^0 p_0 w = mw$$

- Abbiamo anche determinato 4 soluzioni $w(0,r)$ $r = 1,4$
 - Ricordiamo (diapositiva [47](#)) la normalizzazione scelta per garantire il corretto comportamento della corrente nelle trasformazioni di Lorentz

$$w(\mathbf{p}, r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix} \longrightarrow w(\mathbf{0}, r) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \phi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = 1, 2$$

- Analogamente, per $r = 3, 4$

$$w(\mathbf{0}, r) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{r-2} \end{pmatrix} \quad r = 3, 4$$

- Gli spinori $w(0,r)$ sono i 4 autovettori di γ^0 : $\gamma^0 w = \pm w$
 - Sono ortogonali e costituiscono un sistema completo
 - La completezza si esprime tramite la relazione

$$\sum_{r=1,4} w(\mathbf{0}, r) w^\dagger(\mathbf{0}, r) = 2m\hat{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Relazioni di completezza

- Gli aggiunti spinoriali **giocano un ruolo fondamentale nella teoria**
 - Siamo pertanto interessati ad una relazione di completezza **che usi questi ultimi e non gli aggiunti hermitiani**
- Osserviamo che nella base dei w la matrice γ^0 è diagonale

$$(\gamma^0)_{rs} = \frac{w_r^\dagger \gamma^0 w_s}{2m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \varepsilon_r \delta_{rs} \quad \varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases}$$

- A questo punto è immediato verificare che

$$\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0}, r) \bar{w}(\mathbf{0}, r) = 2m \hat{I}$$

- Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0}, r) \bar{w}(\mathbf{0}, r) &= \sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0}, r) w^\dagger(\mathbf{0}, r) \gamma^0 \equiv A \\ A_{\alpha\beta} &= \sum_{\sigma=1,4} \sum_{r=1,4} \varepsilon_r w_\alpha(\mathbf{0}, r) w_\sigma^\dagger(\mathbf{0}, r) \gamma_{\sigma\beta}^0 = 2m \sum_{\sigma=1,4} \sum_{r=1,4} \varepsilon_r \delta_{\alpha r} \delta_{\sigma r} \varepsilon_\sigma \delta_{\sigma\beta} \\ &= 2m \sum_{\sigma=1,4} \varepsilon_\alpha \delta_{\sigma\alpha} \varepsilon_\sigma \delta_{\sigma\beta} = 2m \varepsilon_\alpha \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} = 2m \delta_{\alpha\beta} = 2m \hat{I}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$w_\alpha(\mathbf{0}, r) = \sqrt{2m} \delta_{\alpha r}$

Relazioni di completezza

- Possiamo a questo punto introdurre la relazione di completezza per gli spinori u e v in un sistema di riferimento in cui la particella ha quantità di moto p

- Ricordiamo che u e v sono ottenuti dagli spinori a riposo $w(0,r)$ come

$$u(\mathbf{p}, r) = S(\Lambda) w(\mathbf{0}, r) \quad r = 1, 2 \quad v(\mathbf{p}, r) = S(\Lambda) w(\mathbf{0}, r + 2) \quad r = 1, 2$$

- Verifichiamo che

$$\sum_{r=1,2} [u(\mathbf{p}, r) \bar{u}(\mathbf{p}, r) - v(\mathbf{p}, r) \bar{v}(\mathbf{p}, r)] = 2m\hat{I}$$

- Infatti, posto $u_r = u(\mathbf{p}, r)$, $v_r = v(\mathbf{p}, r)$ e infine $w_r = w(\mathbf{0}, r)$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1,2} [u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r] &= \sum_{r=1,2} [S w_r \overline{S w_r} - S w_{r+2} \overline{S w_{r+2}}] = \sum_{r=1,2} [S w_r \bar{w}_r \bar{S} - S w_{r+2} \bar{w}_{r+2} \bar{S}] \\ &= S \left[\sum_{r=1,2} [w_r \bar{w}_r - w_{r+2} \bar{w}_{r+2}] \right] \bar{S} = S \left[\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w_r \bar{w}_r \right] \bar{S} \end{aligned}$$

- Ricordando che

$$\bar{S} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$$

- Concludiamo

$$S \left[\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w_r \bar{w}_r \right] \bar{S} = S(2m\hat{I}) S^{-1} = 2m\hat{I}$$

$$\sum_{r=1,2} [u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r] = 2m\hat{I}$$