Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 3

4.10.2022

Equazione di Dirac 2
Invarianza relativistica
Descrizione relativistica dello spin
Elicità

anno accademico 2022-2023

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- **Nel caso dell'equazione di Klein-Gordon avevamo visto che l'invarianza per trasformazioni di Lorentz si esprimeva nel seguente modo**
  - **Se ϕ soddisfa l'equazione** $\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = 0$
  - **Allora la funzione definita da** $\phi'\left(x'\right) = \phi(x)$ $\qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
  - **Soddisfa l'equazione** $\left(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\right)\phi'\left(x'\right) = 0$
- **Nel caso dell'equazione di Dirac si ha una situazione simile con una complicazione**
  - **La funzione d'onda $\psi(x)$ ha 4 componenti e una trasformazione di Lorentz modifica anche le componenti**
  - **Facciamo il parallelo con una rotazione nel caso di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$**
    - **La rotazione modifica le componenti del punto** $\mathbf{r}' = \widehat{R}\,\mathbf{r}$
    - **La rotazione modifica anche le componenti del campo vettoriale** $\mathbf{F}'(\mathbf{r}') = \widehat{R}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})$
- **Nel caso del campo spinoriale è fondamentale ricordare che lo spinore è una grandezza matematica differente da un 4-vettore**
  - **Occorre trovare la legge di trasformazione degli spinori (che non è $\boldsymbol{\Lambda}$)**

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- **Come nel caso delle rotazioni o delle trasformazioni di Lorentz assumiamo**
  - **La legge di trasformazione degli spinori è lineare**
  - **Ad ogni trasformazione di Lorentz Λ corrisponde una trasformazione spinoriale $S(\Lambda)$ che permette di calcolare lo spinore in K'**

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad \boxed{\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)} \qquad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

- **Vediamo adesso le proprietà fondamentali di $S(\Lambda)$**
  - **Lo spinore trasformato deve soddisfare l'equazione di Dirac nel sistema K'**

sono le **stesse** matrici γ^{μ} del sistema K

$$\boxed{\left(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m\right)\psi'(x') = 0} \qquad \partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

  - **Sostituendo $\psi'(x') = S\psi(x)$ e $\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\,\partial_{\alpha}$ otteniamo**

$$\left(i\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\partial_{\alpha} - m\right)S\psi(x) = 0$$

  - **Moltiplichiamo da sinistra per S^{-1}**

$$\left(iS^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}S\partial_{\alpha} - mS^{-1}S\right)\psi(x) = 0 \qquad \left[i\left(S^{-1}\gamma^{\mu}S\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\right)\partial_{\alpha} - m\right]\psi(x) = 0$$

- **L'equazione è identica all'equazione di Dirac se**

$$\boxed{S^{-1}\gamma^{\mu}S\Lambda_{\mu}{}^{\alpha} = \gamma^{\alpha}}$$

Invarianza relativistica dell'equazione di Dirac

- **Possiamo ulteriormente trasformare la relazione** $S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda_\mu{}^\alpha = \gamma^\alpha$ **moltiplicando per** $\Lambda^\nu{}_\alpha$ **e sommando su** α

$$S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda^\nu{}_\alpha\Lambda_\mu{}^\alpha = \Lambda^\nu{}_\alpha\gamma^\alpha \qquad S^{-1}\gamma^\mu S\delta^\nu{}_\mu = \Lambda^\nu{}_\alpha\gamma^\alpha \qquad \boxed{S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda^\nu{}_\alpha\gamma^\alpha}$$

  - **A prima vista l'equazione trovata sembrerebbe indicare che le matrici** γ^μ **si trasformano come un 4-vettore** $\to$ **NO, falso**
    - **Infatti sottolineiamo che la condizione** $S^{-1}\gamma^\mu S\Lambda_\mu{}^\alpha = \gamma^\alpha$ **deriva dalla richiesta che le matrici** γ **nelle equazioni nei sistemi** K **e** K' **siano le stesse**
  - **Tuttavia la legge di trasformazione trovata ci permetterà di dimostrare che quantità costruite con le matrici** γ^μ **(ad esempio la corrente** $j^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ **) si trasformano come 4-vettori**
- **A questo punto la dimostrazione dell'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac procede dimostrando, per costruzione, l'esistenza di** $S(\Lambda)$
  - **Non esporremo la procedura dettagliata**
  - **Ricorderemo solo**
    - **L'espressione di una trasformazione di Lorentz (per i 4-vettori) a partire dai generatori**
    - **L'espressione di una trasformazione di Lorentz (per gli spinori) a partire dai generatori**

Trasformazioni di Lorentz

- Una trasformazione di Lorentz dipende da 6 parametri
  - 3 parametri descrivono un boost in una data direzione
  - 3 parametri descrivono una possibile rotazione
- I 6 parametri possono essere espressi tramite la quantità antisimmetrica $a_{\alpha\beta}$
  - Esplicitamente, l'antisimmetria implica $a_{\alpha\beta} = -\, a_{\beta\alpha}$; $a_{\alpha\alpha} = 0$
- La trasformazione si esprime in funzione dei generatori† $M^{\alpha\beta}$

$$\boxed{\Lambda = \exp\left[-\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right]}$$

  - I generatori hanno la forma

$$\left(M^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu} = g^{\alpha}{}_{\mu}g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\beta}{}_{\mu}g^{\alpha}{}_{\nu}$$

- Per trasformazioni di Lorentz che sono dei boost puri i 3 generatori sono

$$\mathbf{K} = (\,K_1, K_2, K_3\,) \qquad K_1 = M^{01} \quad K_2 = M^{02} \quad K_3 = M^{03}$$

  - I 3 parametri rilevanti $a_{\mu\nu}$ possono essere scritti come $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\tanh^{-1}\beta$
  - La trasformazione di Lorentz è $\boxed{\Lambda = \exp[-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K}]}$

- †vedi per esempio (attenzione alle differenti convenzioni e segni)
  - J. Jackson – Classical Electrodynamics, 3d ed. – cap. 11
  - Hitoshi Murayama – lecture notes on Lorentz Group and Lorentz Invariance

Generatori trasformazioni di Lorentz

- **Generatori dei boost**

$$\left(M^{01}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left(M^{02}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left(M^{03}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- **Generatori delle rotazioni**

$$\left(M^{23}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \left(M^{13}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left(M^{12}\right)_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Generatori trasformazioni di Lorentz

- **Quando i generatori vengono usati per costruire le matrici di Lorentz si utilizzano gli indici nella forma $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$**
  - **Alzando l'indice μ**
  - **Generatori dei boost**

$$K_1 = \left(M^{01}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad K_2 = \left(M^{02}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad K_3 = \left(M^{03}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  - **Generatori delle rotazioni**

$$L_1 = \left(M^{23}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 = \left(M^{13}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 = \left(M^{12}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Si può dimostrare che un operatore $S(\Lambda)$ che soddisfa alle richieste che abbiamo fatto per garantire l'invarianza relativistica dell'equazione di Dirac è dato da una formula analoga

$$\boxed{S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}a_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]}$$

  - I generatori sono espressi in funzione delle matrici γ

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

  - I coefficienti $a_{\mu\nu}$ che compaiono nella formula sono gli stessi che compaiono nella formula della trasformazione di Lorentz Λ
- Per trasformazioni che sono dei boost puri i 3 generatori sono

$$B_1 = \sigma^{01} \quad B_2 = \sigma^{02} \quad B_3 = \sigma^{03}$$

- In particolare

$$\sigma^{01} = \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0) = \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^0\gamma^1) = i\gamma^0\gamma^1 = i\alpha_1$$

  - e anologhe per $j = 2{,}3$
  - Inserendo nella formula per $S(\Lambda)$

$$\boxed{S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\gamma^0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma}\right]} \qquad \boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\tanh^{-1}\beta$$

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- Osserviamo che la matrice $S(\Lambda)$ non è unitaria

$$\boxed{S(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right]} \qquad \boxed{S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}a_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]}$$

- Infatti
  - Anche se le matrici α sono hermitiane manca la costante i nell'esponente
  - Nella seconda forma notiamo che gli operatori $\sigma^{\mu\nu}$ non sono hermitiani
- Pertanto

$$S^{-1}(\Lambda) = \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right] \neq S^{\dagger}(\Lambda) = \left(\exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right]\right)^{\dagger} = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right]$$

- Ricordiamo che $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$
  - Di conseguenza $(\sigma^{\mu\nu})^{\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0$
    - Solo le componenti spaziali $(j,k = 1,3)$ sono hermitiane $\left(\sigma^{jk}\right)^{\dagger} = \sigma^{jk}$
    - Per le componenti con un indice temporale $(\mu = 0, k = 1,3)$ vale

$$\left(\sigma^{0k}\right)^{\dagger} = \gamma^0\sigma^{0k}\gamma^0 = -\sigma^{0k}$$

- Poiché questa relazione vale per ogni potenza di $\sigma^{\mu\nu}$ nello sviluppo dell'esponenziale avremo anche (per i boost)

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \overline{S(\Lambda)}}$$

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- **Le informazioni e il formalismo delle precedenti diapositive sono sufficienti per costruire esplicitamente una trasformazione di Lorentz Λ e la trasformazione spinoriale ad essa associata $\mathrm{S}(\Lambda)$**

$$\boxed{S\left(\Lambda\right) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right] = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\left(I + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right)}$$

  - **L'espressione riportata è indipendente dalla rappresentazione**
- **Nella rappresentazione di Pauli-Dirac si ottiene**

$$S\left(\Lambda\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\left[I + \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{S\left(\Lambda\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} I & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} & I \end{pmatrix}}$$

- **Notiamo incidentalmente che l'applicazione dell'operatore $\mathrm{S}(\Lambda)$ agli spinori $w(0,r)$, r=1,4 (v. dia. 36 e 2 seguenti) produce gli spinori $u(\mathrm{p},r)$ e $v(\mathrm{p},r)$**

Trasformazioni di Lorentz per gli spinori

- **Per le rotazioni i 3 generatori sono**

$$\Sigma_1 = i\gamma^2\gamma^3 \quad \Sigma_2 = i\gamma^3\gamma^1 \quad \Sigma_3 = i\gamma^1\gamma^2$$

$$\boxed{\Sigma^j = \frac{i}{2}\sum_{kl}\varepsilon_{jkl}\gamma^k\gamma^l}$$

  - **Si può dimostrare che, indipendentemente dalla rappresentazione, queste matrici sono hermitiane e hanno le stesse regole di commutazione e anticommutazione delle matrici di Pauli**

$$\{\Sigma_k, \Sigma_l\} = 2I\delta_{kl} \quad [\Sigma_k, \Sigma_l] = 2i\varepsilon_{klm}\Sigma_m \quad \Sigma_k^2 = I$$

- **L'operatore di rotazione è**

$$\boxed{S(R) = \exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right]}$$

  - **Dato che gli operatori Σ_k sono hermitiani la matrice $S(R)$ è unitaria**

$$S^\dagger(R) = \left(\exp\left[-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\right]\right)^\dagger = \exp\left[+\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Sigma}^\dagger\right] = S^{-1}(\Lambda)$$

- **D'altro canto per ogni potenza di Σ vale**

$$\gamma^0\Sigma^{k\dagger}\gamma^0 = \Sigma^k$$

  - **Anche per una rotazione si può quindi scrivere**

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \overline{S(\Lambda)}}$$

Momento angolare

- Abbiamo visto che l'equazione di Dirac ha 4 soluzioni
  - Due soluzioni con energia positiva
  - Due soluzioni con energia negativa
- Per interpretare le soluzioni ad energia negativa bisogna utilizzare la teoria delle buche (holes) di Dirac oppure (preferibile) la seconda quantizzazione
  - All'interno di ciascuna tipologia di soluzioni occorre interpretare la molteplicità 2 delle soluzioni
  - Possiamo intuire che ciò ha a che fare con lo spin delle particelle
- Una discussione (intuitiva) molto semplice si può fare nel sistema di riposo della particella

$$\psi(x) = \begin{cases} u(0,r)e^{-imt} \\ v(0,r)e^{+imt} \end{cases}$$

  - In questo sistema le equazioni di Dirac per gli spinori sono

$$\boxed{(\not{p} - m)u = 0} \qquad m\gamma^0 u = mu$$

$$\boxed{(\not{p} + m)v = 0} \qquad m\gamma^0 v = -mv$$

- Nella rappresentazione di Pauli-Dirac sappiamo che le soluzioni sono

$$u(\mathbf{0},1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad u(\mathbf{0},2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad v(\mathbf{0},1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad v(\mathbf{0},2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Momento angolare

- **Le soluzioni sono autovettori di γ^0**
  - **Due con autovalore $+1$**
  - **Due con autovalore -1**

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Per differenziare ulteriormente occorre introdurre un operatore che commuti con γ^0**
  - **Una possibilità è l'operatore Σ_z**

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Ovviamente $[\gamma^0, \Sigma_z] = 0$**
- **Abbiamo**

$$\Sigma_z u(0,1) = u(0,1) \qquad \Sigma_z u(0,2) = -u(0,2)$$

$$\Sigma_z v(0,1) = v(0,1) \qquad \Sigma_z v(0,2) = -v(0,2)$$

- **Inoltre le componenti dell'operatore vettoriale $\boldsymbol{\Sigma}$**
  - **Hanno le regole di commutazione del momento angolare**

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- **Identifichiamo $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ con lo spin della particella**

Interpretazione fisica
(holes di Dirac)

  - **Gli spinori $u(0,1)$ e $v(0,2)$ corrispondono a spin up** **($+1/2$ lungo l'asse z)**
  - **Gli spinori $u(0,2)$ e $v(0,1)$ corrispondono a spin down** **($-1/2$ lungo l'asse z)**
- **Purtroppo ciò funziona solo nel sistema di riposo della particella $(\mathbf{p} = 0)$**

Momento angolare

- **Infatti, in un sistema inerziale arbitrario**
  - **L'operatore di spin che abbiamo definito non commuta con l'Hamiltoniana**
  - **Neppure il momento angolare orbitale commuta con l'Hamiltoniana**
- **Ricordiamo l'equazione di Dirac in forma Hamiltoniana**

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = [-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m]\psi = [\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m]\psi = H\psi$$

- **Calcoliamo il commutatore dell'Hamiltoniana con il momento angolare orbitale**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad L_j = \sum_{kl}\varepsilon_{jkl}r^k p^l$$

  - **Abbiamo**

commuta

$$[H, L_j] = \left[\sum_n \alpha^n p^n + \beta m, \sum_{kl}\varepsilon_{jkl}r^k p^l\right] = \sum_{kln}\left[\alpha^n p^n, \varepsilon_{jkl}r^k p^l\right] = \sum_{kln}\alpha^n\varepsilon_{jkl}\left[p^n, r^k\right]p^l$$

$$= \sum_{kln}\varepsilon_{jkl}\alpha^n\left(-i\delta^{nk}\right)p^l = -i\sum_{kl}\varepsilon_{jkl}\alpha^k p^l = -i(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{p})_j$$

$$\boxed{[H,\mathbf{L}] = -i(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{p})}$$

- **La conclusione è che il momento angolare orbitale non si conserva, neppure durante il moto di una particella libera**

Operatore di spin

- L'operatore di spin che abbiamo introdotto precedentemente è valido solo nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- In una rappresentazione arbitraria l'operatore di spin si trova a partire dai generatori delle rotazioni per gli spinori ($j,k = 1,2,3$)

$$\sigma^{kl} = \frac{i}{2}\left(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k\right) = \frac{i}{2}\left[\gamma^k,\gamma^l\right]$$

- In particolare si ha $\mathrm{S} = ½\, \boldsymbol{\Sigma}$ con Σ^j (j,k,l una permutazione pari di 123)

$$\boxed{\Sigma^j = \sigma^{kl} = i\gamma^k\gamma^l}$$

- Un modo equivalente per scrivere l'operatore di spin è

$$\boxed{\Sigma^j = \frac{i}{2}\sum_{kl}\varepsilon_{jkl}\gamma^k\gamma^l}$$

- Naturalmente, non confondere il simbolo di somma con l'operatore Σ

Operatore di spin

- **Un'altra espressione per Σ, che sarà molto utile in seguito, parte dall'espressione**

$$\boxed{\Sigma^j = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j}$$

  - **Infatti utilizzando le regole di commutazione delle matrici γ e ricordando che $(\gamma^j)^2 = -1$ per $j = 1,2,3$ si ritrova la definizione precedente**
- **Elaborando ulteriormente**

$$\Sigma^j = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j\gamma^0\gamma^0 \quad = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^j\gamma^0$$

  - **Introduciamo la matrice $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$**
- **Arriviamo alla definizione**

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}}$$

- **La matrice γ^5 è molto importante nella teoria degli spinori**
  - **Nella rappresentazione di Pauli-Dirac**

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \gamma^5\boldsymbol{\alpha} \qquad \boxed{\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}}$$

Proprietà dei commutatori

- **Prima proprietà**

$$[AB,C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB$$

$$\boxed{[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B}$$

- **Analogamente**

$$[C,AB] = CAB - ABC = CAB - ACB + ACB - ABC$$

$$\boxed{[C,AB] = [C,A]B + A[C,B]}$$

- **Pertanto**

$$[A,C] = 0 \rightarrow [AB,C] = A[B,C]$$

$$[C,B] = 0 \rightarrow [C,AB] = [C,A]B$$

- **Seconda proprietà**

$$[A,BC] = ABC - BCA = ABC + BAC - BAC - BCA$$

$$\boxed{[A,BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\}}$$

- **Analogamente**

$$\boxed{[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B}$$

Momento angolare

- **Abbiamo adesso tutti gli ingredienti per calcolare il commutatore $[H,\Sigma]$ indipendentemente dalla rappresentazione**
  - **Riscriviamo l'Hamiltoniana utilizzando le matrici γ**

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m = \gamma^0\left(\sum_n \gamma^n p^n + m\right)$$

  - **Calcoliamo**

$$[H,\Sigma_j] = \Big[\underbrace{\gamma^0}_{A}\Big(\underbrace{\sum_n \gamma^n p^n + m}_{B}\Big), \tfrac{1}{2}i\sum_{kl}\varepsilon_{jkl}\underbrace{\gamma^k\gamma^l}_{C}\Big]$$

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$\left[\left(\gamma^k\gamma^l\right),\gamma^0\right] = \gamma^k\gamma^l\gamma^0 - \gamma^0\gamma^k\gamma^l = 0$$

$$[A,C] = 0$$

$$[X,mI] = 0$$

$$= \tfrac{1}{2}i\gamma^0\left[\left(\sum_n \gamma^n p^n + m\right),\sum_{kl}\varepsilon_{jkl}\gamma^k\gamma^l\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}i\gamma^0\sum_{nkl}\left[\gamma^n p^n,\varepsilon_{jkl}\gamma^k\gamma^l\right] = \tfrac{1}{2}i\gamma^0\sum_{nkl}\varepsilon_{jkl}\left[\gamma^n,\gamma^k\gamma^l\right]p^n$$

  - **Inoltre**

$$[A,BC] = \{A,B\}C - B\{A,C\}$$

$$\left[\gamma^n,\gamma^k\gamma^l\right] = \left\{\gamma^n,\gamma^k\right\}\gamma^l - \gamma^k\left\{\gamma^n,\gamma^l\right\} = 2g^{nk}\gamma^l - 2g^{nl}\gamma^k$$

Momento angolare

- **Riepiloghiamo i risultati fino a questo punto**

$$\left[H,\Sigma_j\right] = \tfrac{1}{2} i\gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} \left[\gamma^n, \gamma^k\gamma^l\right] p^n \qquad \left[\gamma^n, \gamma^k\gamma^l\right] = 2g^{nk}\gamma^l - 2g^{nl}\gamma^k$$

  - **Sostituendo otteniamo**

$$\boxed{\text{per } n,k = 1,2,3 \;\; g^{nk} = -\delta^{nk}}$$

$$\left[H,\Sigma_j\right] = \tfrac{1}{2} i\gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} \left(2g^{nk}\gamma^l - 2g^{nl}\gamma^k\right) p^n = i\gamma^0 \sum_{nkl} \varepsilon_{jkl} \left(g^{nk}\gamma^l - g^{nl}\gamma^k\right) p^n$$

$$= i\gamma^0 \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \left(-\gamma^l p^k + \gamma^k p^l\right) = 2i\gamma^0 \sum_{kl} \varepsilon_{jkl}\gamma^k p^l = 2i \sum_{kl} \varepsilon_{jkl}\alpha^k p^l = 2i\left(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}\right)_j$$

  - **Concludendo** $\boxed{[H,\boldsymbol{\Sigma}] = 2i\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}}$

- **Pertanto neppure lo spin** $(\mathrm{S} = ½\, \Sigma)$ **si conserva**
- **Tuttavia l'operatore momento angolare totale** $\mathbf{J} = \mathbf{L} + ½\, \boldsymbol{\Sigma}$ **commuta con l'Hamiltoniana (come deve essere)**

$$[H,\mathbf{J}] = \left[H, \mathbf{L} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right] = [H,\mathbf{L}] + \left[H, \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right]$$

$$[H,\mathbf{J}] = -i\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} + i\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}$$

$$\boxed{[H,\mathbf{J}] = 0}$$

Momento angolare

- **Dal momento che l'operatore di spin ½Σ non commuta con H non è possibile utilizzare i suoi autovalori per classificare gli stati**
- **Si utilizzano due alternative**
  - **Proiezione dello spin lungo la direzione di moto: Elicità**
  - **Per particelle con massa non nulla: Direzione dello spin nel sistema di riposo**
    - **Nel sistema di riposo vale la trattazione non relativistica**

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- **Ricordiamo che** $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \qquad [H,\mathbf{J}] = 0$
  - **Evidentemente, dato che** $[H,\mathbf{p}] = \mathbf{0}$ $\quad \boxed{[H,\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}] = 0}$
  - **Abbiamo inoltre**

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p}$$

  - **Pertanto commuta con l'Hamiltoniana anche l'operatore elicità**

$$\boxed{h\left(\mathbf{p}\right) = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{\left|\mathbf{p}\right|} = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \qquad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}}{\left|\mathbf{p}\right|}}$$

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- Ricordiamo alcuni risultati ottenuti utilizzando la rappresentazione di Dirac

$$u(\mathbf{p},r) = \sqrt{E_{\mathbf{p}}+m}\begin{pmatrix}\phi_r \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_r\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \qquad h\left(\mathbf{p}\right) = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\end{pmatrix}$$

- Ricordiamo che le funzioni ϕ_r sono due arbitrari spinori bidimensionali
  - L'operatore $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ ha due autovettori $\phi_\pm$ $\qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\phi_\pm = \pm\phi_\pm$
  - Utilizzando questi spinori $\qquad u(\mathbf{p},\pm) = \sqrt{E_{\mathbf{p}}+m}\begin{pmatrix}\phi_\pm \\ \dfrac{\pm|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_\pm\end{pmatrix}$
  - Applicando l'operatore $h(\mathrm{p})$ agli spinori $u(\mathrm{p},\pm)$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_+ \\ \dfrac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_+ \\ \dfrac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_+\end{pmatrix} \qquad \boxed{h(\mathbf{p})u(\mathbf{p},+) = u(\mathbf{p},+)}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_- \\ \dfrac{-|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_-\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\phi_- \\ \dfrac{-|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}+m}\phi_-\end{pmatrix} \qquad \boxed{h\left(\mathbf{p}\right)u\left(\mathbf{p},-\right) = -u\left(\mathbf{p},-\right)}$$

Descrizione relativistica dello spin: Elicità

- Il vantaggio di questa classificazione risiede nel fatto che $[H,h(\mathbf{p})] = 0$
  - L'autovalore dell'elicità $\lambda = \pm 1$ si conserva
  - Può essere utilizzata anche per particelle di massa nulla
- Ovviamente l'espressione esplicita di $h(\mathrm{p})$ che abbiamo trovato vale solamente per la rappresentazione di Dirac
  - In altre rappresentazioni l'espressione di $h(\mathrm{p})$ e di $u(\mathrm{p})$ sarà differente
    - Occorre trovare la soluzione dell'equazione agli autovalori $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, u = \pm u$
- Quanto detto fin qui vale anche per gli spinori v

- Nel caso della rappresentazione di Dirac osserviamo
  - Gli spinori $\phi_\pm$ sono spinori bidimensionali non relativistici
  - Rappresentano gli autostati dell'operatore di spin non relativistico quantizzato lungo l'asse $\hat{\mathrm{n}}$
  - La loro espressione esplicita può essere trovata
    - Ruotando gli autostati ϕ_r $(r = 1{,}2)$ che sono gli autostati di σ_z
    - Risolvendo esplicitamente l'equazione matriciale $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \phi_\pm = \pm \phi_\pm$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- Un altro metodo per descrivere lo spin fa riferimento al sistema inerziale in cui la particella è a riposo
  - Rest Frame: possibile solo per particelle con massa $\neq 0$
- Nel sistema di riposo della particella l'Hamiltoniana H commuta con l'operatore di spin Σ
  - Gli spinori possono essere anche autostati di Σ
  - La trattazione coincide con quella non relativistica
  - È possibile preparare uno stato ϕ_ξ polarizzato in una direzione arbitraria $\hat{\xi}$

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} = \left\langle \phi_\xi \mid \boldsymbol{\sigma} \mid \phi_\xi \right\rangle}$$

  - Ad esempio, nella rappresentazione di Pauli-Dirac

$$w(0, \xi) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \phi_\xi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}\, w = \lambda w$$

- A questo punto si può applicare una trasformazione di Lorentz che trasforma lo spinore $w(0, \xi)$
  - Dal sistema in cui la particella è a riposo $p'^\nu = (m, 0)$
  - Al sistema in cui la particella ha un 4-momento $p^\nu = (E, \mathrm{p})$

$$\boxed{p^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu p'^\mu}$$

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- **Ovviamente, in questo modo, abbiamo una complicazione**
  - **Il 4-momento p della particella è definito nel sistema di laboratorio K**
  - **Lo spin è definito nel sistema di riposo della particella K'**
- **Si introduce pertanto un 4-vettore s per la descrizione dello spin**
  - **Nel sistema di riposo della particella**

$$s' = (0, \boldsymbol{\xi}) \qquad s' \cdot s' = -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = -1$$

    - **Notiamo che si tratta di un 4-vettore a modulo negativo (space-like)**
  - **Inoltre nel sistema di riposo abbiamo**

$$p' = (m, \mathbf{0}) \qquad p' \cdot s' = m \cdot 0 - \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$$

- **La relazione $s' \cdot p' = 0$ è invariante e vale in tutti i sistemi di riferimento**
- **Si passa al sistema K mediante una trasformazione Lorentz**

$$(m, \mathbf{0}) \to (E, \mathbf{p}) \quad \boxed{p^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu p'^\mu} \qquad (0, \boldsymbol{\xi}) \to \left(s^0, \vec{\mathbf{s}}\right) \quad \boxed{s^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu s'^\mu}$$

- **Attenzione: nel sistema di laboratorio K la parte spaziale di s**

NON È IL VALORE DI ASPETTAZIONE DELLO SPIN

Descrizione relativistica dello spin: rest frame

- In forma esplicita, le componenti di s nel sistema K in cui la particella di massa m ha energia E e momento p sono†§

$$s^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m}\boldsymbol{\xi}_{||} \qquad \mathbf{s}_\perp = \boldsymbol{\xi}_\perp \qquad \mathbf{s}_{||} = \frac{E}{m}\boldsymbol{\xi}_{||}$$

  - Evidentemente $\xi_{||}$ e $\xi_\perp$ sono rispettivamente la componente parallela e perpendicolare alla direzione della quantità di moto
- In forma vettoriale le relazioni precedenti si possono esprimere come

$$s^0 = \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}}{m} \qquad \mathbf{s} = \boldsymbol{\xi} + \frac{(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi})}{m(E+m)}\mathbf{p} \qquad \mathbf{s}^2 = \boldsymbol{\xi}^2 + \frac{(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}{m^2}$$

  - Notiamo che se la polarizzazione della particella nel suo sistema di riposo è $-\xi$ nel sistema di laboratorio le 4 componenti di s^μ cambiano tutte di segno rispetto a quelle corrispondenti a $+\xi$
- Quando si utilizza il 4-vettore s^μ gli spinori u e v si scrivono

$$\boxed{u(\mathbf{p}, s) \qquad v(\mathbf{p}, s)}$$

- In queste formule s non è un indice ma un 4-vettore
  - I due stati di polarizzazione sono $\pm s = \pm s^\mu$
- †Landau L,Lifshitz E,Pitaevskii L – Quantum Electrodynamics – Pergamon 1982 - cap III, § 29 pag. 106
- §Questo formalismo si applica anche a particelle di spin intero

Relazioni di completezza

- **Abbiamo visto che nel sistema di riposo l'equazione di Dirac si riduce a**

$$i\gamma^0\partial_0\psi = m\psi \qquad \psi = we^{-ip_0 t} \qquad \gamma^0 p_0 w = mw$$

  - **Abbiamo anche determinato 4 soluzioni $w(0,r)$ $r = 1{,}4$**
    - **Ricordiamo (diapositiva 47) la normalizzazione scelta per garantire il corretto comportamento della corrente nelle trasformazioni di Lorentz**

$$w(\mathbf{p},r) = \sqrt{E_\mathbf{p} + m}\begin{pmatrix} \phi_r \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_\mathbf{p} + m}\phi_r \end{pmatrix} \Longrightarrow \qquad w(\mathbf{0},r) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \phi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = 1,2$$

    - **Analogamente, per $r = 3{,}4$**

$$w(\mathbf{0},r) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{r-2} \end{pmatrix} \quad r = 3,4$$

  - **Gli spinori $w(0,r)$ sono i 4 autovettori di γ^0:** $\quad \gamma^0 w = \pm w$
    - **Sono ortogonali e costituiscono un sistema completo**
    - **La completezza si esprime tramite la relazione**

$$\boxed{\sum_{r=1,4} w(\mathbf{0},r)\, w^\dagger(\mathbf{0},r) = 2m\widehat{I}} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \ldots$$

Relazioni di completezza

- **Gli aggiunti spinoriali giocano un ruolo fondamentale nella teoria**
  - **Siamo pertanto interessati ad una relazione di completezza che usi questi ultimi e non gli aggiunti hermitiani**
- **Osserviamo che nella base dei w la matrice γ^0 è diagonale**

$$\left(\gamma^0\right)_{rs} = \frac{w_r^\dagger \gamma^0 w_s}{2m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \varepsilon_r \delta_{rs} \qquad \varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1,2 \\ -1 & r = 3,4 \end{cases}$$

- **A questo punto è immediato verificare che**

$$\boxed{\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0},r)\,\overline{w}(\mathbf{0},r) = 2m\widehat{I}}$$

  - **Infatti**

$$\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0},r)\,\overline{w}(\mathbf{0},r) = \sum_{r=1,4} \varepsilon_r w(\mathbf{0},r)\, w^\dagger(\mathbf{0},r)\,\gamma^0 \equiv A$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1,4}\sum_{r=1,4} \varepsilon_r w_\alpha(\mathbf{0},r)\, w_\sigma^\dagger(\mathbf{0},r)\,\gamma^0_{\sigma\beta} = 2m \sum_{\sigma=1,4}\sum_{r=1,4} \varepsilon_r \delta_{\alpha r}\delta_{\sigma r}\varepsilon_\sigma \delta_{\sigma\beta}$$

$$\boxed{w_\alpha(\mathbf{0},r) = \sqrt{2m}\,\delta_{\alpha r}}$$

$$= 2m \sum_{\sigma=1,4} \varepsilon_\alpha \delta_{\sigma\alpha}\varepsilon_\sigma\delta_{\sigma\beta} = 2m\,\varepsilon_\alpha\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta} = 2m\,\delta_{\alpha\beta} = 2m\widehat{I}_{\alpha\beta}$$

Relazioni di completezza

- **Possiamo a questo punto introdurre la relazione di completezza per gli spinori u e v in un sistema di riferimento in cui la particella ha quantità di moto p**
  - **Ricordiamo che u e v sono ottenuti dagli spinori a riposo $w(0,r)$ come**

$$u(\mathbf{p},r) = S(\Lambda)w(\mathbf{0},r) \quad r = 1,2 \qquad v(\mathbf{p},r) = S(\Lambda)w(\mathbf{0},r+2) \quad r = 1,2$$

- **Verifichiamo che**

$$\sum_{r=1,2}\left[u(\mathbf{p},r)\overline{u}(\mathbf{p},r) - v(\mathbf{p},r)\overline{v}(\mathbf{p},r)\right] = 2m\widehat{I}$$

  - **Infatti, posto $u_r = u(\mathrm{p},r)$, $v_r = v(\mathrm{p}, r)$ e infine $w_r = w(0,r)$**

$$\sum_{r=1,2}\left[u_r\overline{u}_r - v_r\overline{v}_r\right] = \sum_{r=1,2}\left[Sw_r\overline{Sw_r} - Sw_{r+2}\overline{Sw_{r+2}}\right] = \sum_{r=1,2}\left[Sw_r\overline{w_r}\overline{S} - Sw_{r+2}\overline{w_{r+2}}\overline{S}\right]$$

$$= S\left(\sum_{r=1,2}\left[w_r\overline{w_r} - w_{r+2}\overline{w_{r+2}}\right]\right)\overline{S} = S\left(\sum_{r=1,4}\varepsilon_r w_r\overline{w_r}\right)\overline{S}$$

  - **Ricordando che**

$$\overline{S} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$$

  - **Concludiamo**

$$S\left(\sum_{r=1,4}\varepsilon_r w_r\overline{w_r}\right)\overline{S} = S\left(2m\widehat{I}\right)S^{-1} = 2m\widehat{I}$$

$$\boxed{\sum_{r=1,2}\left[u_r\overline{u}_r - v_r\overline{v}_r\right] = 2m\widehat{I}}$$