Lezione 7
Equazioni Differenziali Ordinarie

http://idefix.mi.infn.it/~palombo/didattica/Lab-TNDS/CorsoLab/LezioniFrontali

Fernando Palombo

Equazioni Differenziali Ordinarie

Descrizione dell'evolversi spazio-temporale di fenomeno fisici nelle leggi fondamentali della Fisica (meccanica, elettromagnetismo, termodinamica, ecc)

Leggi scritte in termini di equazioni contenenti funzioni e loro derivate (equazioni differenziali (ED). Equazioni di questo tipo si ritrovano anche in altre discipline (biologia, ingegneria, ecc)

Ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che appare nell'equazione

Se l'incognita è funzione di una sola variabile, la ED è detta ordinaria (**EDO**), altrimenti si parla di ED alla derivate parziali. Noi consideriamo solo EDO

Equazioni Differenziali Ordinarie

Una EDO di ordine **n** si può sempre scrivere come un sistema di n EDO accoppiate del primo ordine. Ad esempio la risoluzione della EDO del secondo ordine :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x)$$

Si riconduce alla risoluzione del sistema di due EDO del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z(x) \\ \frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x) \end{cases}$$

dove z(x) = dy/dx è una nuova variabile ausiliaria

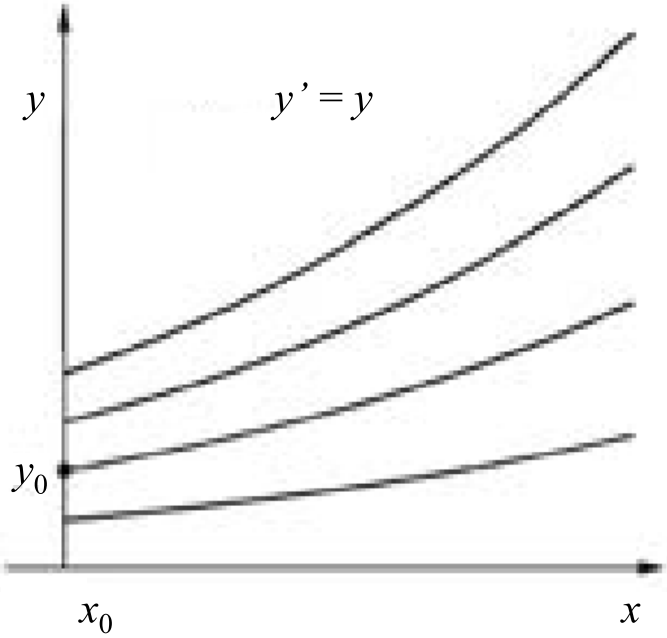
Quindi senza perdere generalità ci occupiamo della integrazione di EDO del primo ordine

EDO del I^0 Ordine

Questa EDO $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$ ha soluzione : $y(x) = \int f(x, y(x))dx$

Se si sa integrare questa equazione si ha la soluzione analitica. Per esempio

La EDO $\frac{dy}{dx} = y$ ha una famiglia di soluzioni $y = ce^x$ dove c è una costante di integrazione arbitraria.



Il valore di questa costante la devo fissare imponendo una condizione.

Se la EDO è di dimensione n ci saranno n costanti di integrazione da fissare e quindi sono necessarie n condizioni.

EDO del I^0 Ordine

Se le condizioni sono fissate tutte per lo stesso valore della variabile indipendente allora il problema si dice ai **valori iniziali** altrimenti si ha un **problema al contorno**.

Noi consideriamo solo problemi ai valori iniziali.

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x)) & \forall x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \quad con & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

EDO - Soluzione Numerica

Se non si conosce la soluzione analitica (o è complicato calcolarla), la EDO può essere integrata in modo numerico. Si determinano valori approssimati di y(x) in corrispondenza ad un numero discreto di valori della variabile indipendente x: $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N$

con $h = x_{i+1} - x_i$ passo dell'integrazione

Per semplicità prendiamo un passo costante $h = (b-a)/N$

Metodi di integrazione:

- **one-step**: y_n calcolato utilizzando solo y_{n-1}
- **multi-step**: y_n determinato da fit polinomiale su alcuni (o tutti) i punti precedenti y_i

Solito avvertimento sui fit polinomiali di grado ≥ 5 !!

Noi qui consideriamo **solo metodi one-step**

Metodo di Eulero

Si debba risolvere numericamente la EDO **y' = F(x, y(x))** con F(x,y(x)) funzione nota e con la condizione iniziale **$y(x_0) = y_0$**.
Sia y = f(x) la funzione soluzione che vogliamo approssimare.

Per h piccoli possiamo scrivere $y' = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e sostituendo nella EDO:

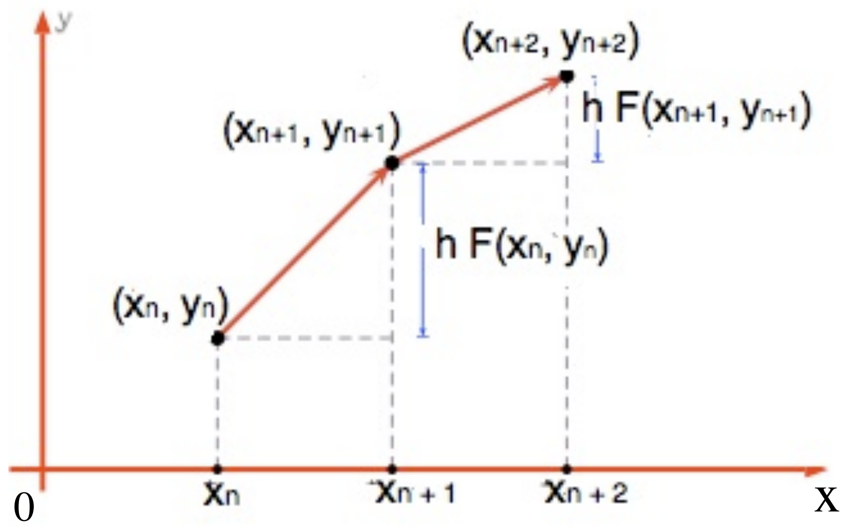
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x, y(x))$$

cioè anche

$$f(x+h) = f(x) + hF(x, y(x))$$

o equivalentemente

$$y(x+h) = y(x) + hF(x, y(x))$$



Per l'iesimo intervallo si ha: $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = F(x_i, y_i)$

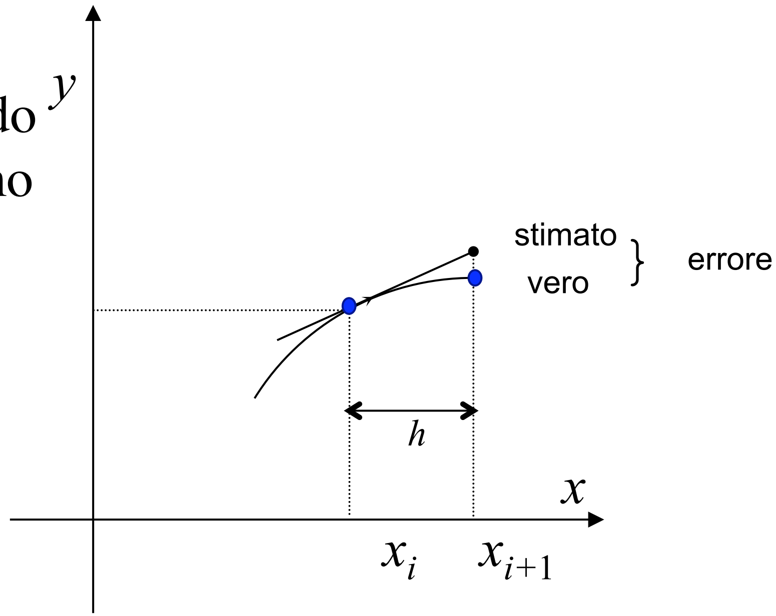
Metodo di Eulero

Questo viene ripetuto in ognuno degli N intervalli sino ad arrivare al punto finale b.
La formula ricorsiva esplicita di questo metodo (detto di Eulero) è:

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i) \qquad i = 0, 1, \cdots, N-1$$

Si inizia da $x_0 = a$ e $y(a) = y_0$.
Poniamo i = 0 nella formula e determiniamo y_1. Ci spostiamo su $x_1 = x_0 + h$ e conoscendo y_1 poniamo i = 1 nella formula e determiniamo y_2, ecc, sino al punto finale $x_N = b$

Il punto stimato dal metodo si discosta dalla soluzione vera. L'errore commesso decresce col passo h



Metodo di Eulero e Termine di Correzione

La formula di Eulero è asimmetrica: usa solo i valori della funzione e della derivata calcolati nel punto iniziale dell'intervallo.

Il calcolo è basato sul primo termine della serie di Taylor. Il termine di correzione dovuto al troncamento nello sviluppo della funzione è un **$O(h^2)$**.

Per convenzione se l'errore di troncamento va come **$O(h^{n+1})$**, si dice che la formula di integrazione è di **ordine n**. La formula di Eulero è una formula di integrazione di **ordine 1.**

Il metodo di Eulero non è raccomandabile per usi pratici in quando poco preciso (in confronto ad altri metodi di pari semplicità) e talvolta è instabile (quando la funzione è particolarmente variabile).

Esempio Applicativo

Si debba risolvere la EDO **$y' + y = x$** nell'intervallo [0, 1] con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Questa EDO ha la soluzione analitica $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$. Conoscendo la soluzione analitica esatta, possiamo confrontarla con la soluzione numerica approssimata.

Prendiamo $h = 0.2$ e quindi consideriamo i 6 punti: $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$ e $x_5 = 1.0$

La formula di Eulero è: $$\frac{y_{i+1} - y_i}{0.2} + y_i = x_i \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

o anche : $$y_{i+1} = 0.8 y_i + 0.2 x_i \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Con tre cifre decimali le soluzioni esatte e quelle approssimate sono :

Esempio Applicativo

Soluzione numerica: 1.000, 0.800, 0.680, 0.624, 0.619, 0.655
Soluzione esatta   : 1.000, 0.837, 0.741, 0.698, 0.699, 0.736

Dal confronto di questi risultati si può dedurre l'errore dell'approssimazione in ogni x_i

Nella pratica però generalmente la soluzione esatta non è nota e quindi non possiamo fare il confronto appena visto.

L'accuratezza può però essere determinata a posteriori in questo modo: si integra due volte: una volta con passo h e una seconda volta con passo h/2 e come cifre significative si tengono quelle comuni nei due calcoli.

Per esempio se in un punto x_1 con passo $h = 0.1$ si trova $y = 0.876532$ mentre con passo $h = 0.05$ si trova $y = 0.876513$, allora si assume come risultato accurato $y = 0.8765$ (da confrontare con l'accuratezza richiesta nella integrazione!)

Queste considerazioni valgono pure anche per le altre formule di integrazione

Metodo di Heun

Consideriamo la **EDO $y' = F(x,y(x))$** tra [a, b] con la condizione iniziale $y(a) = y_0$. Siano N gli intervalli con passo $h = (b-a)/N$. Possiamo integrare la EDO nel primo intervallo $[x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x))dx = \int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx = y(x_1) - y(x_0)$$

e risolvendo rispetto a $y(x_1)$ si ha: $y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x))dx$

L'integrale a destra può essere calcolato numericamente, usando per esempio

la formula dei trapezi: $y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{2}(F(x_0, y(x_0)) + F(x_1, y(x_1)))$

Notiamo che nel termine a destra $y(x_1)$ non è ancora noto. Una stima però posso averla usando il metodo di Eulero :

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{h}{2}(F(x_0, y_0) + F(x_1, y_0 + hF(x_0, y_0)))$$

Metodo di Heun

Il meccanismo può essere ripetuto per ogni intervallo di passo h. Chiamando **$p_{i+1} = y_i + h\, F(x_i, y_i)$** possiamo scrivere cosi la formula ricorsiva:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(x_i, y_i) + F(x_{i+1}, p_{i+1}))$$

Questo metodo di integrazione si dice metodo di **Heun** (o di **Eulero migliorato**).

Si potrebbe far vedere che l'errore nell'iesimo intervallo dovuto alla approssimazione del calcolo numerico va come $-y'''(c_i)\frac{h^3}{12}$
La formula di integrazione di Heun è quindi del **secondo ordine**.

L'idea base di questo metodo si può facilmente esprimere in forma geometrica. Nel metodo di Eulero si utilizza per l'avanzamento la tangente alla curva nel punto iniziale mentre nel metodo di Heun si usa la pendenza media tra $F(x_i, y_i)$ e $F(x_{i+1}, y_i + h\, F(x_i, y_i))$

Errore Globale nel Metodo di Heun

Si potrebbe mostrare che l'errore globale E accumulato dopo N passi è:

$$-\sum_{i=0}^{N-1} y''(c_i)\frac{h^3}{12} \approx \frac{b-a}{12}y''(c)h^2 = O(h^2)$$

Quindi se dimezziamo il passo h, l'errore globale si riduce di un fattore 1/4:

$$E(y(b),\frac{h}{2}) \approx E(y(b),h)\cdot\frac{1}{4}$$

Metodi di Runge-Kutta

Per migliorare l'approssimazione nell'integrazione della EDO possiamo utilizzare uno sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$y(x+h) = y(x) + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + O(h^3)$$

Poiché $\frac{dy}{dx} = F(x, y(x))$ si ha:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}$$

Da questa possiamo ricavare una formula ricorsiva per l'integrazione:

$$x_i = x_{i-1} + h\,, \quad y_i = y_{i-1} + hF(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{h^2}{2}\left(F\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_{i-1}\,,\, y_{i-1}}$$

Il punto debole di questa formula è che necessita del valore della derivata seconda e questo generalmente è cosa tutt'altro che banale !!

Metodi di Runge-Kutta

Noi però possiamo cercare formule di integrazione dove un valore approssimato della derivata seconda è ottenuto dal solo calcolo della funzione (nota) F(x,y(x)).

I metodi di integrazione che usano questa tecnica si chiamano metodi di **Runge-Kutta.**

Esistono **diverse formule** di Runge-Kutta. Noi consideriamo le due più utilizzate: quella del secondo ordine e quella del quarto ordine

Runge-Kutta del Secondo Ordine

Consideriamo una generica funzione g(x) (supposta due volte differenziabile) e due suoi sviluppi in serie di Taylor:

$$g(x+h) = g(x+\frac{h}{2}) + \frac{h}{2}g'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2!}g''(x+\frac{h}{2}) + O(h^3)$$

$$g(x) = g(x+\frac{h}{2}) - \frac{h}{2}g'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2!}g''(x+\frac{h}{2}) + O(h^3)$$

Sottraendo membro a membro si ha :

$$g(x+h) - g(x) = hg'(x+\frac{h}{2}) + O(h^3)$$

Si arriva ad una formula che utilizza solo la derivata prima ma a differenza di quanto aspettato è una formula del secondo ordine.

Ancora una volta una applicazione dell'idea della **estrapolazione di Richardson**

Runge-Kutta del Secondo Ordine

Il termine contenente la derivata seconda scompare componendo opportunamente due diversi sviluppi di Taylor della stessa funzione. Ciò fa si che l'errore dell'approssimazione numerica con questa formula migliora di un ordine in h

Se applichiamo quanto detto alla nostra EDO, abbiamo che :

$$y(x+h) - y(x) = hF(x+\frac{h}{2}, y(x+\frac{h}{2}))$$

In questa formula però il valore di y(x + h/2) non è ancora noto! Una sua stima la possiamo ottenere utilizzando la formula di Eulero:

$$y(x+\frac{h}{2}) = y(x) + \frac{h}{2}F(x, y(x)) + O(h^2)$$

La derivata nel punto intermedio ha un errore che va come h^2:

$$F(x+\frac{h}{2}, y(x+\frac{h}{2})) = F(x+\frac{h}{2}, F(y(x) + hF(x, y(x))) + O(h^2)$$

Runge-Kutta del Secondo Ordine

Nella formula ricorsiva appena vista la derivata nel punto centrale è moltiplicata per h, portando l'andamento dell'errore ad h^3 come ci aspettiamo.

La formula ricorsiva cercata la possiamo perciò scrivere così

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ (\Delta y)_0 &= hF(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hF(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}(\Delta y)_0) \end{aligned}$$

Indicando con

$$(\Delta y)_1 = hF(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}(\Delta y)_0)$$

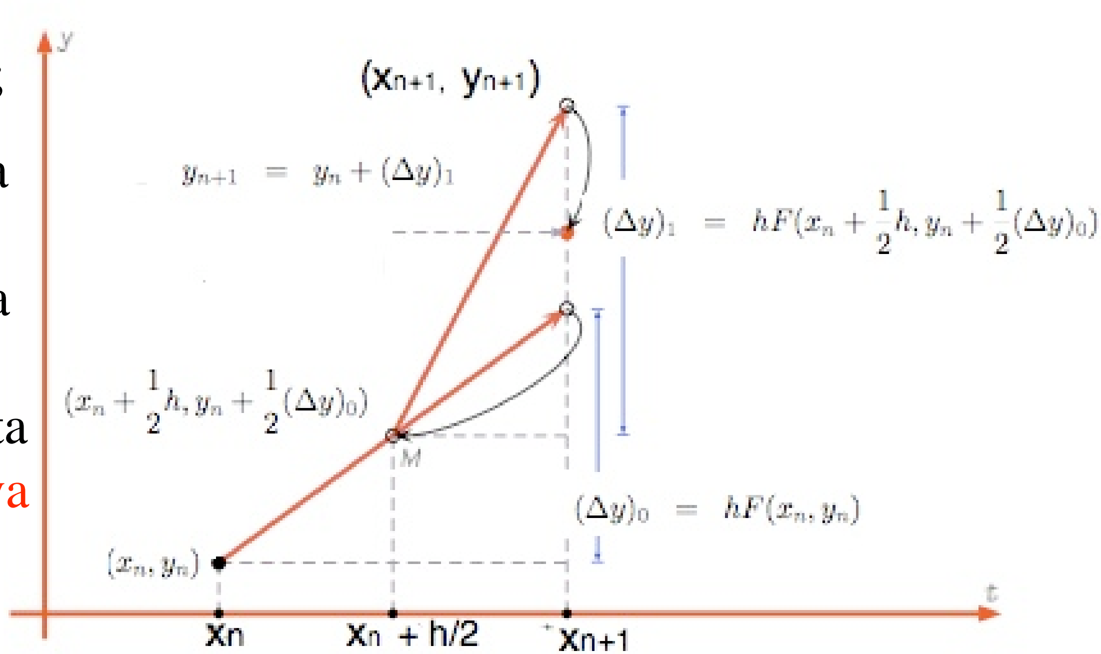
possiamo riscrivere la formula ricorsiva (detta di Runge-Kutta del secondo ordine) così:

$$y_{n+1} = y_n + (\Delta y)_1 + O(h^3)$$

Runge-Kutta del Secondo Ordine

Interpretazione geometrica;

Nel metodo di Runge-Kutta del secondo ordine la formula di avanzamento da x_n ad x_{n+1} è ancora quella di Eulero ma viene utilizzata per una prima stima di prova a metà intervallo.



Si applica ora la stessa formula d'integrazione iterativamente su se stessa nel punto M. Si ottiene cosi un nuovo incremento

$$(\Delta y)_1 = hF(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}(\Delta y)_0)$$

che è quello che si applica ad y_n per passare al punto successivo y_{n+1}

Runge-Kutta del Secondo Ordine

L'applicazione della formula di avanzamento del primo ordine valutata in due stadi nel modo visto porta alla cancellazione del contributo di errore $O(h^2)$ e la formula di integrazione risultante è del secondo ordine.

Questo metodo è noto come metodo di **Runge-Kutta del secondo ordine** o **metodo del midpoint**.

È possibile generalizzare la formula di Runge-Kutta a due stadi a formule ad n stadi, valutando n volte la funzione F all'interno dell'intervallo.

Combinando opportunamente i risultati è possibile eliminare dall'errore di approssimazione i termini $O(h^3)$, $O(h^4)$, ecc

Runge-Kutta del Quarto Ordine

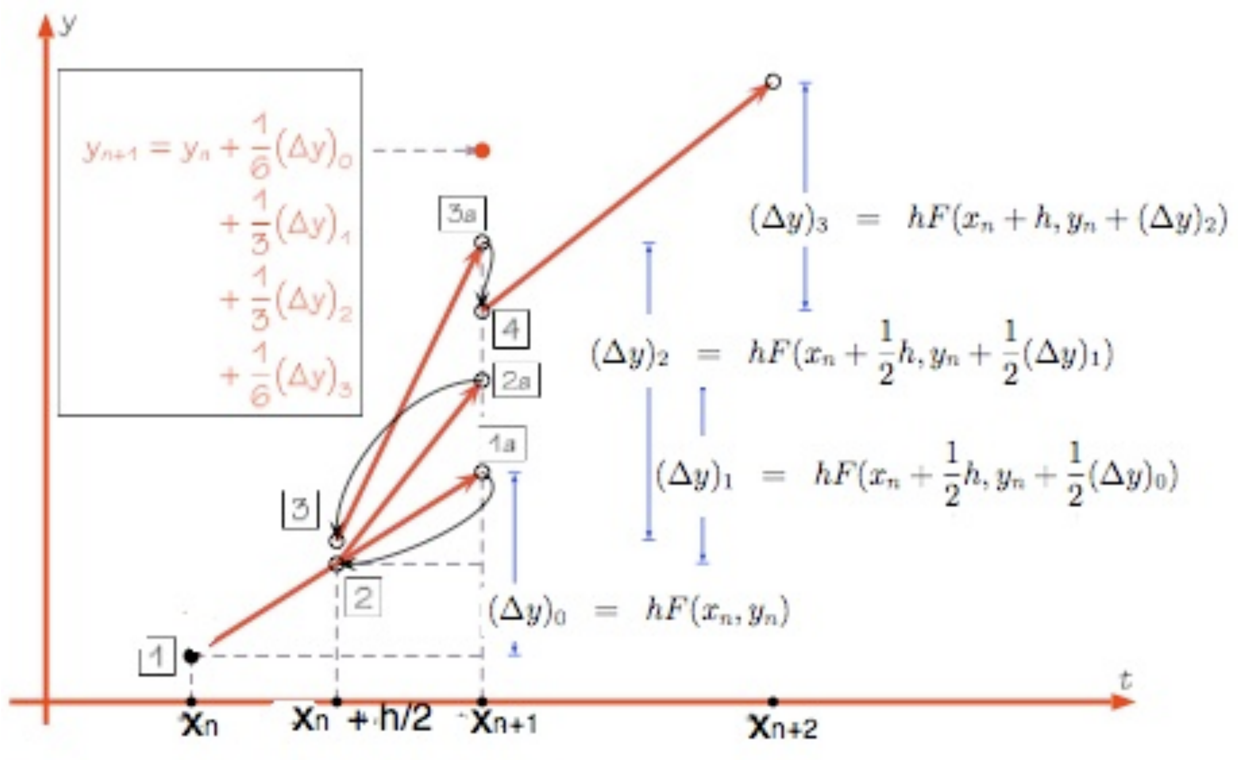
Nella formula Runge-Kutta del quarto ordine la funzione F è calcolata quattro volte per ogni passo:

una volta nel punto iniziale
due volte di prova al centro
una volta di prova nel punto finale.

Gli incrementi utilizzati sono:

$$
\begin{aligned}
(\Delta y)_0 &= hF(x_n, y_n) \\
(\Delta y)_1 &= hF(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}(\Delta y)_0) \\
(\Delta y)_2 &= hF(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}(\Delta y)_1) \\
(\Delta y)_3 &= hF(x_n + h, y_n + (\Delta y)_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(\Delta y)_0 + \frac{1}{3}(\Delta y)_1 + \frac{1}{3}(\Delta y)_2 + \frac{1}{6}(\Delta y)_3
\end{aligned}
$$

Runge-Kutta del Quarto Ordine



La combinazione dei valori calcolati è tale da rendere del quarto ordine questa formula di integrazione.

Questa formula è in generale superiore alla formula di Runge-Kutta del secondo ordine

Runge-Kutta del Quarto Ordine

I passi da fare per utilizzare questo metodo:

1- Calcolare $(\Delta y)_0$, $(\Delta y)_1$, $(\Delta y)_2$ e $(\Delta y)_3$ della formula appena vista con $n = 0$ e con i valori iniziali assegnati x_0 e y_0;

2- Calcolare il valore y_1 utilizzando i quattro valori di incrementi precedentemente calcolati e conservati;

3- la procedura viene reiterata sostituendo x_0+h ad x_0 e $y_1 = y_0 + h$ a y_0 e ricominciando dal punto 1 sino a coprire l'intero intervallo di integrazione.

Vediamo ora una applicazione di questi metodi di integrazione di ODE (/Applicazioni-Web/ODE e /Applicazioni-Web/ODERoot)