Lezione 3
Interpolazione Polinomiale

http://idefix.mi.infn.it/~palombo/didattica/Lab-TNDS/CorsoLab/LezioniFrontali

Fernando Palombo

Scopi dell'interpolazione

Dati i valori y_i di una grandezza Y in corrispondenza dei valori x_i di un'altra grandezza X all'interno dell'intervallo [a, b], noi vogliamo sostituire tutti questi punti (che vengono detti nodi) con una funzione che passa attraverso tutti i nodi.

Determinata la funzione interpolante, è possibile calcolare il valore della funzione in nuovi punti interni alla regione di **interpolazione** [a, b].

In diverse situazioni è molto più utile vedere disegnata la funzione interpolante che passa per i vari nodi.

È possibile anche calcolare il valore della funzione in un punto esterno all'intervallo [a, b] di interpolazione. Questo processo si dice di **estrapolazione**.

Come vedremo l' estrapolazione va fatta con estrema cautela perchè può portare a valori completamene sbagliati.

Scopi dell'interpolazione

In talune situazioni le funzioni sono particolarmente complicate e si preferisce approssimarle in particolari regioni con funzioni più semplici.

In tutti questi casi l'approssimazione è intesa **esatta** (o matematica) nel senso che la funzione passa esattamente attraverso tutti i nodi.

Vi sono situazioni in cui i punti per l'interpolazione hanno una incertezza (come nel caso delle misure sperimentali). In questo caso noi parliamo di **interpolazione tra i punti o meglio di fit**.

I parametri della funzione interpolante vengono determinati mediante un processo di fit che minimizza la discordanza tra la funzione interpolante e l'insieme dei nodi.

Interpolazione Polinomiale

Siano **a** = $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ i parametri del modello scelto per l'interpolazione **$y = f(x, a)$** . Questi parametri si determinanano, utilizzando i nodi (x_i, y_i) e risolvendo il sistema di equazioni $y_i = f(x_i, a)$

Il modello interpolante deve essere :

1) il più possibile semplice da usare
2) con parametri calcolabili facilmente
3) l'algoritmo di calcolo deve essere il più veloce possibile
4) il modello deve rappresentare la funzione al meglio

Una classe di funzioni che soddisfa pienamente a questi requisiti è quella dei polinomi

Con l'interpolazione polinomiale la funzione interpolante si scrive :

$$f(x, a) = a_0\, f_0(x) + a_1\, f_1(x) + \ldots\ldots + a_n\, f_n(x)$$

con $f_i(x)$ generica funzione in x.

Interpolazione Polinomiale

La rappresentazione più usuale (standard) è comunque con $f_i(x) = x^i$ quindi in forma standard:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. + a_n x^n \qquad (1)$$

Per determinare gli (n+1) parametri del polinomio si possono usare i nodi. Se si conoscono (n+1) nodi (y_i, x_i) con ascisse tutte distinte, allora i coefficienti possono essere determinati risolvendo un sistema di (n+1) equazioni in (n+1) incognite. Per polinomi in forma standard si ha :

$X\,\mathbf{a} = \mathbf{y}$

X **Matrice di Vandermonde**

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & (x_{n-1})^2 & \cdots & (x_{n-1})^n \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{pmatrix}$$

Interpolazione Polinomiale

Questo sistema di equazioni può essere risolto con metodi diretti (regola di Cramer o eliminazione di Gauss) o con metodi iterativi (molto più potenti) che noi non trattiamo.

Ad esempio consideriamo i tre nodi (4, 0), (10, 0.5), (15, 1) e interpoliamo questi nodi con un polinomio di secondo grado: $y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$.

Imponendo il passaggio per i tre punti abbiamo un sistema di tre equazioni in tre incognite :

$$\begin{cases} 4 = a_0 \\ 10 = a_0 + 0.5\, a_1 + 0.5^2\, a_2 \\ 15 = a_0 + 1.0\, a_1 + 1.0^2\, a_2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $a_0 = 4$, $a_1 = 13$ e $a_2 = -2$ e di conseguenza il polinomio di secondo grado che interpola i tre nodi dati è:

$$y = -2\, x^2 + 13\, x + 4$$

Metodo di Lagrange

Il polinomio di grado n che interpola (n+1) nodi si può determinare seguendo il metodo di Lagrange. Siano i punti di coordinate $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ gli (n+1) nodi e supponiamo che se $i \neq k$ allora $x_i \neq x_k$.

Definiamo **polinomi di Lagrange di grado k** (con k = 0,1,…, n) i seguenti polinomi:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

che valgono 0 in ogni x_i se $i \neq k$ e valgono 1 se $i = k$. Quindi $L_k(x_i) = 0$ in tutti gli x_i se $i \neq k$ e $L_k(x_k) = 1$, (k = 0,1, …, n) → $L_k(x_i) = \delta_{ki}$ (delta di Kronecker)

Il polinomio di grado n, $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$ interpola gli n+1 nodi dati.

Risulta infatti $p(x_k) = y_k L_k(x_k) = y_k$

Metodo di Lagrange

Facciamo un esempio, interpolando con un polinomio di secondo grado i tre punti (-2,7), (1, 11), (3,17). I polinomi di Lagrange sono:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{15} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-2))(x-3)}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{(x+2)(x-3)}{(-6)} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-1)}{(3-(-2))(3-1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{10}
\end{aligned}
$$

Quindi il polinomio di secondo grado interpolante i tre punti e':

$$p_2(x) = 7L_0(x) + 11L_1(x) + 17L_2(x)$$

Come si verifica facilmente.

Metodo di Lagrange

Questo metodo è semplice.

Notiamo però che se abbiamo interpolato n punti determinando il polinomio interpolante e vogliamo interpolare un polinomio di grado n+1 aggiungendo un ulteriore nodo, dovremo ricalcolare tutti i polinomi di Lagrange.

Questo comporta un elevato numero di calcoli.

Questo non succede col **metodo di Newton** che ora passiamo a considerare.

Metodo di Newton

Metodo più semplice e diretto per trovare le soluzioni di un polinomio di grado n che interpola n+1 nodi: (x_0, y_0),……. (x_n, y_n)

Il polinomio costante $p_0(x)= y_0$ interpola il primo punto (vale y_0 in x_0) ma non il secondo nodo (x_1, y_1). Allora aggiungiamo un secondo termine che valga 0 in x_0 mantenendo valido il risultato precedente. Otteniamo cosi un polinomio $p_1(x)$;

$$p_1(x) = y_0 + t_1(x - x_0)$$

Imponendo $p_1(x_1) = y_1$ si determina il valore di t_1. Per aggiungere un altro nodo e interpolare con un polinomio di secondo grado , aggiungiamo al polinomio un termine che si annulli in x_0 e x_1:

$$p_2(x) = y_0 + t_1(x - x_0) + t_2(x - x_0)(x - x_1)$$

per determinare t_2 impongo che $p_2(x_2) = y_2$ e cosi via sino ad un polinomio di grado n

Applicazione del Metodo di Newton

Calcoliamo il polinomio di terzo grado che interpola i quattro punti:

(-1, -2), (3, 1), (4, -1) , (7, 4)

$p_0(x) = -2$

$p_1(x) = -2 + t_1(x+1)$; $p_1(3)= -2 + 4t_1 = 1 \rightarrow t_1=3/4$

$p_2(x) = -2 +3/4\ (x+1) + t_2(x+1)(x-3);$

$p_2(4) = 2 + 15/4 + 5t_2 = -1 \rightarrow t_2=-11/20$

$p_3(x) = -2 +3/4\ (x+1) -11/20\ (x+1)(x-3) +t_3(x+1(x-3)(x-4)$

$p_3(7) = -2 + 6 -88/5 + 96t_3 = 4 \rightarrow t_3 = 11/60$

Ordinando il polinomio, si ha:

$p_3(x) = 11/60\ x^3 – 33/20\ x^2 + 83/30\ x +13/5$

Questo algoritmo è migliore degli altri dal punto di vista dell’efficienza computazionale

Interpolazione di una Funzione

Data una funzione continua in [a, b] e dati n + 1 punti in questo intervallo, allora possiamo calcolare la funzione in questi punti : $f(x_0)$, …, $f(x_n)$.

Il polinomio di grado n che interpola questi n+1 nodi diciamo che è un polinomio interpolante della funzione nell'intervallo [a, b].

Interpolare una funzione con un polinomio è spesso molto utile perché permette di semplificare la forma della funzione nell'intervallo considerato, di fare quadrature di funzioni, derivazioni numeriche ecc.

L'interpolazione può avvenire anche a pezzi (con polinomi diversi nelle diverse zone della funzione (o in gruppi diversi di nodi)

Interpolazione di una Funzione

Consideriamo la funzione **$y = \log_{10}(x)$** e supponiamo di volerla approssimare con un polinomio di secondo grado passante per i nodi $x_0 = 10^{-1}$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 10$

I tre nodi hanno coordinate $[10^{-1}, 1]$, $[1, 0]$ e $[10, 1]$

Si risolve il sistema di equazioni $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ con

$$V = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10^2 & 10 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni sono $a_1 = -10/99$, $a_2 = 11/9$ e $a_3 = -111/99$.

Il polinomio interpolante è quindi:

$$\mathbf{p_2(x) = -10/99\, x^2 + 11/9\, x - 111/99}$$

Resto dell'interpolazione

La funzione $r(x) = f(x) - p_n(x)$ è detta **resto dell'interpolazione**. È una misura della discrepanza tra la funzione approssimata e il polinomio interpolante.

Si può dimostrare il seguente teorema:

Detti a e b il massimo ed il minimo degli x_i (i= 0, 1, ,…. , n) e se la funzione f(x) è derivabile n+1 volte, allora esiste all'interno dell'intervallo [a, b] un punto ξ tale che:

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Ad esempio nel caso $n = 1$ e $x_0 \le x \le x_1$ il resto è dato da:

$$r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\, f''(\xi)/2$$

Ponendo $(x_1 - x_0) = h$ e detto $M_2 = \max |f''(x)|$ in [a, b] si ha:

$$\max |(x-x_0)(x-x_1)| = h^2/4 \quad \text{e} \quad |r(x)| \le M_2\, h^2/8$$

Gradi del Polinomio e dell'approssimazione

Aumentando il grado del polinomio interpolante, il grado di approssimazione della funzione aumenta? Vediamo se è vero (o meglio se è sempre vero!).

$$r(x) \leq \max |(x-x_0)(x-x_1)\ldots..(x-x_n)|\, M_{n+1} /(n+1)! \qquad \text{con } M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$$

Per semplicità punti equidistanti: $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,.., n)$ e poniamo $x = x_0 + th$ allora possiamo scrivere :

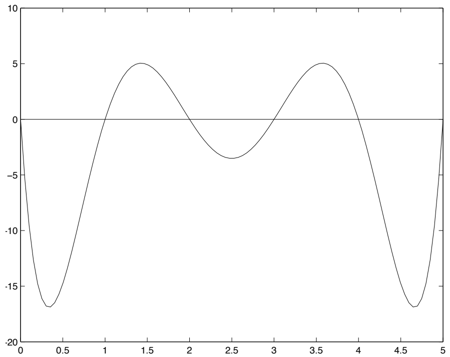
$$\mathbf{r(x) \leq \max |P_n(t)|\ h^{n+1} M_{n+1}/ (n+1)!}$$

dove $P_n(t) = t(t-1) \ldots.. (t-n)$

Supponendo per ora che la derivata (n+1)-esima non vari eccessivamente nell'intervallo $[x_0, x_n]$ → il comportamento del resto è dominato dal comportamento del polinomio $\mathbf{P_n(t)}$ che ha zeri in $t = 0,1, \ldots, n$.

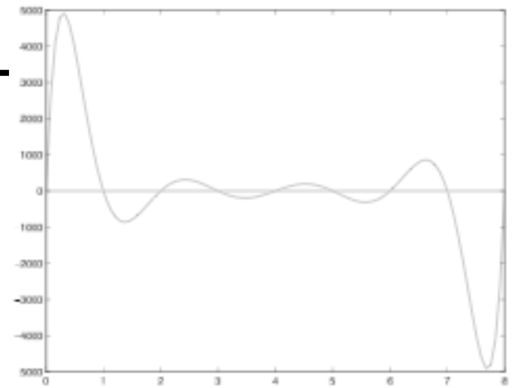
Vediamo il comportamento di alcuni di questi polinomi

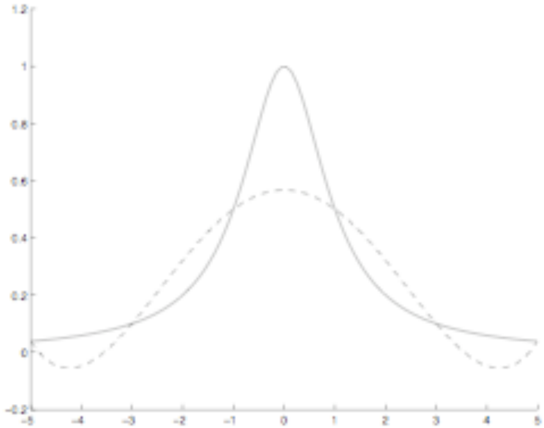
Comportamento dei Polinomi



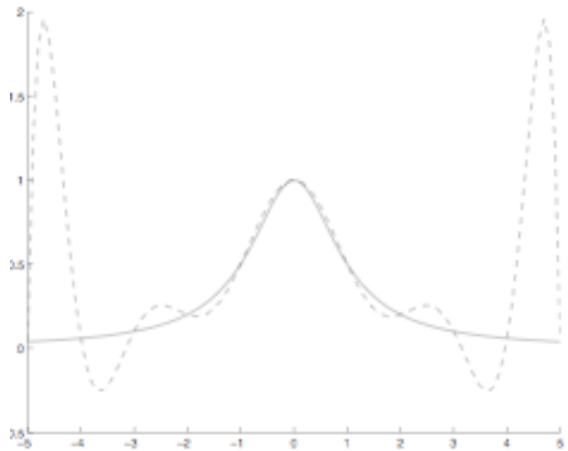
$\leftarrow$ $P_5(t)$ $[0, 5]$

$P_8(t)$ $[0, 8]$ $\rightarrow$





Runge
$f(x) = 1/(1 + x^2)$
$[-5,5]$

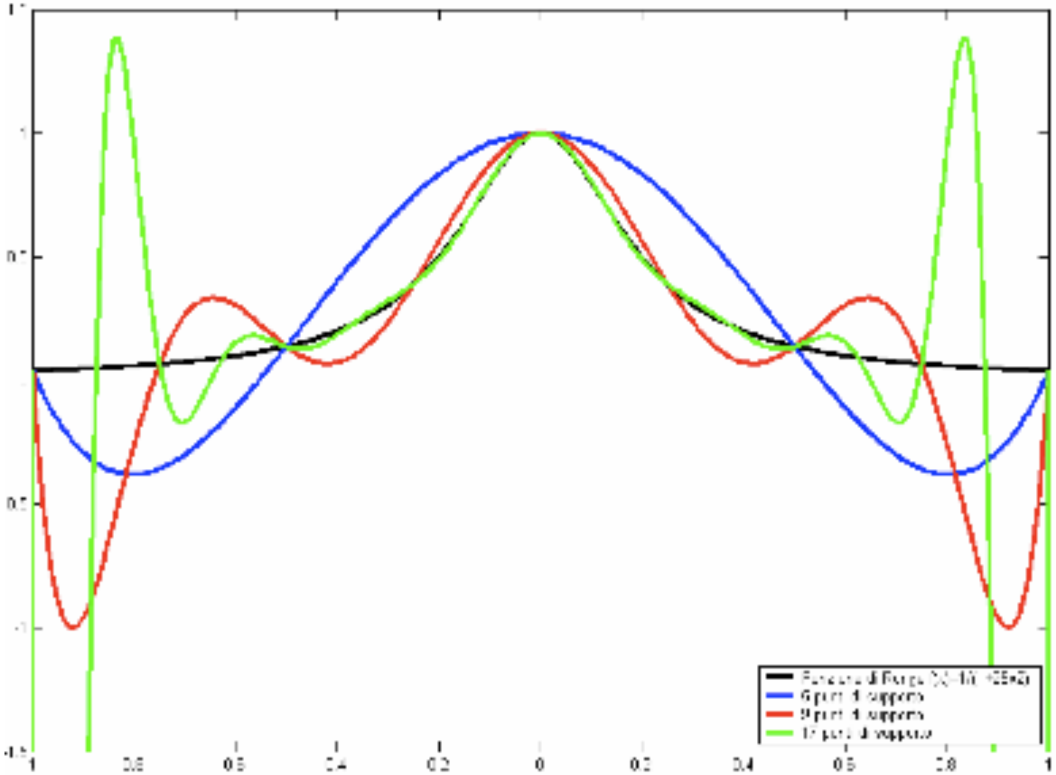


Polinomio con n=5

polinomio con n=10

n/2 punto di simmetria per $P_n(t)$, i massimi relativi crescono passando dal centro agli estremi. Si può far vedere che il massimo del polinomio nel primo e nell'ultimo sottointervallo **cresce con n** in modo **esponenziale**

Comportamento dei Polinomi



Quindi se le variazioni della derivata seconda sono contenute, **il resto della interpolazione risulta minore nella parte centrale dell'intervallo.**

Suggerimenti usare polinomi di basso grado (max 3-5) e prevalentemente per la parte centrale dell'intervallo.

Queste considerazioni ci mostrano come sia particolarmente rischioso fare estrapolazione al di fuori dell'intervallo di interpolazione. I valori estrapolati possono risultare del tutto sbagliati.

Interpolazione a Tratti

Per interpolare un numero crescente di nodi sembra quasi inevitabile aumentare il grado del polinomio interpolante.

Una alternativa valida è l'interpolazione a tratti. L'insieme di nodi è suddiviso in sottogruppi e in ogni sottogruppo si usa un polinomio interpolante di grado inferiore.