

Formalismo Matematico nella Violazione di CP

Fernando Palombo

Per queste trasparenze vedi:

<http://lxmi.mi.infn.it/~palombo/didattica/CPViolation/Lezione2-FormalismoMatematico.pdf>

Sommario

- Evoluzione Temporale del Mesoni Neutri.
 - Formalismo di Wigner- Weisskopf

- Tre tipi di Violazione di CP
 - Diretta
 - Puramente nel Mixing
 - Nell'interferenza

- Produzione Coerente di Coppie $B\bar{B}$
 - Tagging.
 - CP nell'interferenza

BaBar Physics Book Cap. 1

**<http://lxmi.mi.infn.it/~palombo/didattica/CPViolation/babar504-001.pdf>
oppure una delle tesi (in italiano) dei miei studenti nel mio ufficio**

<http://lxmi.mi.infn.it/~palombo/didattica/CPViolation/cpviolrpp.pdf>

<http://lxmi.mi.infn.it/~palombo/didattica/CPViolation/TesiVincenzo.pdf>

Notazioni

Il meccanismo (e formalismo) della violazione di CP e' essenzialmente lo stesso per i decadimenti dei mesoni K , D , B_d e B_s . Indichiamo con X^0 uno di questi stati neutri.

L'ampiezza di un decadimento debole, governato dalla hamiltoniana H , del mesone X^0 in uno stato finale f sia : $A_f = \langle f | H | X^0 \rangle$

Indicando con $\bar{X}^0$ e $\bar{f}$ gli stati CP coniugati, si ha che:

$$\bar{A}_f = \langle f | H | \bar{X}^0 \rangle, \quad A_{\bar{f}} = \langle \bar{f} | H | X^0 \rangle, \quad \bar{A}_{\bar{f}} = \langle \bar{f} | H | \bar{X}^0 \rangle$$

L'operatore di CP introduce su questi stati due fasi arbitrarie e non fisiche:

$$\begin{aligned} CP|X^0\rangle &= \exp(+i\xi_X) |\bar{X}^0\rangle, & CP|f\rangle &= \exp(+i\xi_f) |\bar{f}\rangle, \\ CP|\bar{X}^0\rangle &= \exp(-i\xi_X) |X^0\rangle, & CP|\bar{f}\rangle &= \exp(-i\xi_f) |f\rangle \end{aligned}$$

$$(CP)^2=1$$

Se CP si conserva A_f e $\bar{A}_{\bar{f}}$ hanno lo stesso modulo e una fase relativa arbitraria e non fisica pari a $\xi_f - \xi_X$

Formalismo di Wigner-Weisskopf

Consideriamo uno stato all'istante $t=0$, sovrapposizione di X^0 e $\bar{X}^0$ (per semplicità): $|\psi(0)\rangle = \alpha(0) |X^0\rangle + \beta(0) |\bar{X}^0\rangle$

Quando lo stato evolve nel tempo, oltre al loro mixing, bisogna tener conto anche che possono decadere in tutti i loro possibili stati finali f_1, f_2 , etc

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |X^0\rangle + \beta(t) |\bar{X}^0\rangle + \sum c_n(t) |f_n\rangle$$

Calcolare l'evoluzione temporale di questo stato è pressoché impossibile.

Si può utilizzare un formalismo molto più semplice sviluppato da Wigner-Weisskopf e fondato sulla teoria delle perturbazioni in meccanica quantistica.

Se : - i parametri $c_n(t)$ sono nulli all'istante $t=0$,

- siamo interessati solo a $\alpha(t)$ e $\beta(t)$,
- la scala dei tempi a cui siamo interessati è molto maggiore dei tempi propri dell'interazione forte,

allora si può utilizzare la seguente approssimazione di Wigner-Weisskopf

Formalismo di Wigner-Weisskopf

Si utilizza lo stato $\psi(t)$ appartenente allo spazio con base $|X^0\rangle$, $|\bar{X}^0\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

e l'evoluzione temporale e' governata dalla equazione di Schroedinger

dipendente dal tempo: $i \frac{d\psi(t)}{dt} = H \psi(t)$

dove la matrice complessa 2x2

$$H \equiv \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

(hamiltoniana effettiva) e' scritta come somma di due matrici M e Γ :

$$H = M - i \Gamma/2$$

Si puo' mostrare che M e' la matrice di massa. I suoi elementi diagonali m_{11} e m_{22} sono le masse dei due stati X^0 e $\bar{X}^0$ mentre gli elementi non diagonali regolano le loro oscillazioni. Γ e' la matrice di disintegrazione in cui i termini diagonali regolano le disintegrazioni dei due stati e gli elementi non diagonali regolano le oscillazioni tra gli stati reali accessibili ai due stati X^0 e $\bar{X}^0$

Evoluzione Temporale dei Mesoni Neutri

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= (m_{11} - \frac{1}{2}i\gamma_{11})\alpha + (m_{12} - \frac{1}{2}i\gamma_{12})\beta \\i\frac{\partial\beta}{\partial t} &= (m_{21} - \frac{1}{2}i\gamma_{21})\alpha + (m_{22} - \frac{1}{2}i\gamma_{22})\beta\end{aligned}$$

Le due equazioni ottenute con CPT devono essere uguali (invarianza di CPT) :

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\beta}{\partial t} &= (m_{11} - \frac{1}{2}i\gamma_{11})\beta + (m_{12}^* - \frac{1}{2}i\gamma_{12}^*)\alpha \\i\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= (m_{21}^* - \frac{1}{2}i\gamma_{21}^*)\beta + (m_{22} - \frac{1}{2}i\gamma_{22})\alpha\end{aligned}$$

L'uguaglianza delle due equazioni richiede che :

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{11} &= \mathbf{m}_{22} = \mathbf{m} , & \gamma_{11} &= \gamma_{22} = \gamma \\ \mathbf{m}_{21} &= \mathbf{m}_{12}^* , & \gamma_{21} &= \gamma_{12}^*\end{aligned}$$

Evoluzione Temporale dei Mesoni Neutri

Quindi si puo' scrivere :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - \frac{1}{2}i\gamma & m_{12} - \frac{1}{2}i\gamma_{12} \\ m_{12}^* - \frac{1}{2}i\gamma_{12}^* & m - \frac{1}{2}i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Gli autostati di massa sono gli autovettori della hamiltoniana:

$$|X_L\rangle = p|X^0\rangle + q|\bar{X}^0\rangle$$

L = Low (mass)

$$|X_H\rangle = p|X^0\rangle - q|\bar{X}^0\rangle$$

H = Heavy (mass)

con la normalizzazione $|p|^2 + |q|^2 = 1$.

Si verifica che :

$$q = \sqrt{\frac{m_{12}^* - \frac{1}{2}i\gamma_{12}^*}{m_{12} - \frac{1}{2}i\gamma_{12}}} p$$

Evoluzione Temporale dei Mesoni Neutri

Ai due autostati corrispondono gli autovalori λ_H e λ_L dati da :

$$\lambda_L = m_L - i\frac{\Gamma_L}{2}, \quad \lambda_H = m_H - i\frac{\Gamma_H}{2}$$

dove m_L e m_H sono le masse degli stati $|X_H\rangle$ e $|X_L\rangle$, Γ_H e Γ_L le larghezze corrispondenti. E' possibile determinare le quantita' : $\Delta m \equiv m_H - m_L$ e $\Delta\Gamma \equiv \Gamma_H - \Gamma_L$

$$(\Delta m)^2 - \frac{1}{4}(\Delta\Gamma)^2 = 4(|m_{12}|^2 - \frac{1}{4}|\gamma_{12}|^2), \quad \Delta m \Delta\Gamma = 4\text{Re}(m_{12}\gamma_{12}^*)$$

Δm e' positivo per definizione , il segno di $\Delta\Gamma$ deve essere determinato per via sperimentale . Sperimentalmente per i K si trova un valore positivo mentre per i D , B_d e B_s non e' ancora stato misurato.

Per i B il Modello Standard prevede $\Delta\Gamma < 0$).

Evoluzione Temporale dei Mesoni Neutri

Per i mesoni D, a causa di dominanti contributi non perturbativi, e' problematico fare previsioni attendibili.

Notiamo che, nei mesoni D, B_d e B_s , $\Delta\Gamma$ e' piccolo perche' a causa della alta massa lo spazio delle fasi a disposizione di X^0 e $\bar{X}^0$ e' grande per entrambi e quindi la loro vita media e' circa uguale (questo a differenza dei K).

Ecco perche' nei K si considerano gli autostati di massa in accordo alla loro vita media K_1 e K_2 mentre per esempio per i B si considerano gli stati B_H e B_L in accordo alla loro massa

Evoluzione Temporale dei B Neutri

Nei mesoni B $\Delta\Gamma \ll \Delta m$ e inoltre $\Delta\Gamma/\Gamma$ e' piuttosto piccolo, di conseguenza bisogna considerare l'evoluzione di entrambi gli autostati di massa .

Evoluzione temporale degli stati $|B_H(t)\rangle$ e $|B_L(t)\rangle$ al tempo proprio t :

$$|B_H^0(t)\rangle = \exp(-i\lambda_H t) |B_H^0(0)\rangle$$

$$|B_L^0(t)\rangle = \exp(-i\lambda_L t) |B_L^0(0)\rangle$$

Evoluzione temporale degli stati fisici $|B_{\text{phys}}^0(t)\rangle$ e $|\bar{B}_{\text{phys}}^0(t)\rangle$ al tempo proprio t se inizialmente si ha puro $|B^0(0)\rangle$ oppure puro $|\bar{B}^0(0)\rangle$:

$$|B_{\text{phys}}^0(t)\rangle = g_+(t) |B^0\rangle + \left(\frac{q}{p}\right) g_-(t) |\bar{B}^0\rangle$$

$$|\bar{B}_{\text{phys}}^0(t)\rangle = \left(\frac{p}{q}\right) g_-(t) |B^0\rangle + g_+(t) |\bar{B}^0\rangle$$

Evoluzione Temporale dei B Neutri

con
$$g_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left(\exp(-im_H t - \frac{1}{2}\Gamma_H t) \pm \exp(-im_L t - \frac{1}{2}\Gamma_L t) \right)$$

Dalla diagonalizzazione della hamiltoniana si ha :

$$\begin{aligned} m_H &= m + \frac{\Delta m}{2} & \Gamma_H &= \gamma - \frac{\Delta\Gamma}{2} \\ m_L &= m - \frac{\Delta m}{2} & \Gamma_L &= \gamma + \frac{\Delta\Gamma}{2} \end{aligned}$$

Trascurando $\Delta\Gamma$, si ha :

$$\begin{aligned} g_+(t) &= \exp(-imt) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) \\ g_-(t) &= i \exp(-imt) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) \end{aligned}$$

Evoluzione Temporale dei B Neutri

Rate di decadimento dipendente dal tempo per $B_{phys}^0 \rightarrow f$

$$\frac{d\Gamma(B_{phys}^0(t) \rightarrow f)}{dt} = \left| \langle f | H | B_{phys}^0(t) \rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left[\begin{aligned} & (1 + \cos(\Delta m t)) |A_f|^2 + \\ & + (1 - \cos(\Delta m t)) \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{A}_f|^2 - \\ & - 2 \Im \left(\frac{q}{p} A_f^* \bar{A}_f \right) \sin(\Delta m t) \end{aligned} \right]$$

“decay”

“oscillation, then decay”

$$= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} |A_f|^2 \left[\begin{aligned} & (1 + \cos(\Delta m t)) + \\ & + (1 - \cos(\Delta m t)) \left| \lambda_f \right|^2 - \\ & - 2 \Im(\lambda_f) \sin(\Delta m t) \end{aligned} \right]$$

“interference”

$\Gamma = \gamma$ delle formule precedenti

$$\lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_f}{A_f}$$

Evoluzione Temporale dei B Neutri

Si possono scrivere espressioni simili per i rate dei decadimenti

$$\bar{B}^0_{\text{phys}}(t) \rightarrow f, \quad B^0_{\text{phys}}(t) \rightarrow \bar{f} \quad \text{e} \quad B^0_{\text{phys}}(t) \rightarrow \bar{f}$$

Da queste espressioni possiamo dedurre delle quantità osservabili da misurare sperimentalmente come ad esempio la asimmetria di CP dipendente dal tempo:

$$A_{f_{CP}}(t) \equiv \frac{d\Gamma/dt(\bar{B}^0_{\text{phys}} \rightarrow f_{CP}) - d\Gamma/dt(B^0_{\text{phys}} \rightarrow f_{CP})}{d\Gamma/dt(\bar{B}^0_{\text{phys}} \rightarrow f_{CP}) + d\Gamma/dt(B^0_{\text{phys}} \rightarrow f_{CP})}$$

dove f_{CP} rappresenta uno stato finale, autostato di CP, che può essere raggiunto sia da B^0_{phys} che da $\bar{B}^0_{\text{phys}}$

Violazione di CP

I principali meccanismi che inducono violazione di CP sono tre:

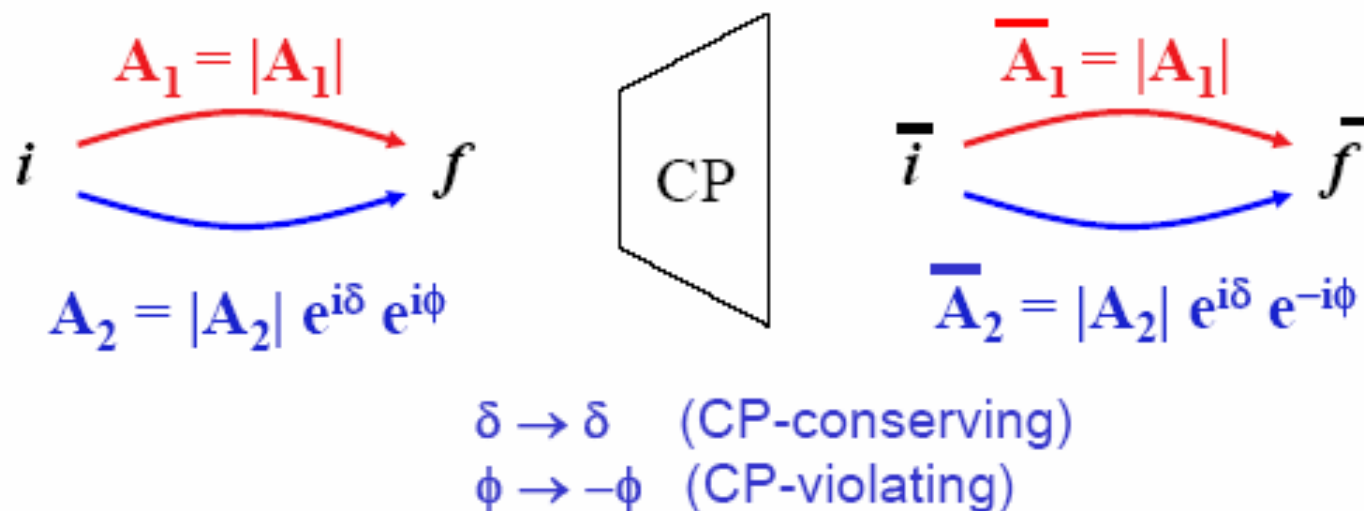
- **Violazione di CP nel decadimento (detta anche diretta)**
- **Violazione di CP nel mixing**
- **Violazione di CP nell'interferenza tra un decadimento senza mixing ed uno col mixing**

Violazione di CP Diretta

Supponiamo che B^0_{phys} o $\bar{B}^0_{\text{phys}}$ possano decadere in uno stato finale f e nel suo stato CP-coniugato $\bar{f}$ tramite **due o piu' ampiezze** che scriviamo cosi

$$A_f = \sum_i A_i e^{i(\phi_i + \delta_i)} \quad \text{and} \quad \bar{A}_{\bar{f}} = \eta_{CP} \sum_i A_i e^{i(-\phi_i + \delta_i)}$$

dove ogni ampiezza e' scritta mettendo in evidenza la fase debole ϕ_i che cambia segno sotto CP e la forte δ_i che e' invece invariante per trasformazioni di CP. Supponiamo si abbiano due ampiezze A_1 e A_2 :



Violazione di CP Diretta

Violazione di CP diretta (integrata nel tempo) (con due ampiezze):

$$A_{CP} \equiv \frac{\Gamma(i \rightarrow f) - \Gamma(\bar{i} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(i \rightarrow f) + \Gamma(\bar{i} \rightarrow \bar{f})} = \frac{2|A_1||A_2| \sin \delta \sin \phi}{|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2| \cos \delta \cos \phi}$$

E' l'unica esistente se i mesoni B sono carichi

$$A_{CP} = [N(B^- \rightarrow f) - N(B^+ \rightarrow f^+)] / [N(B^- \rightarrow f) + N(B^+ \rightarrow f^+)]$$

δ e ϕ sono le fasi forti e deboli relative di una ampiezza rispetto all'altra. Se **entrambe** sono diverse da **zero** allora si ha la condizione per avere la violazione di CP diretta: $|\bar{A}_{\bar{f}}/A_f| \neq 1$

Si noti che il rapporto delle ampiezze e le **fasi forti** sono molto difficili da calcolare (grandi incertezze teoriche). La violazione di CP diretta e' molto difficile da osservare e misurare. E' stata misurata recentemente nei K (come abbiamo gia' visto) e nei B (come vedremo tra breve)

Violazione di CP Puramente nel Mixing

Uno sbilanciamento nel mixing degli autostati di CP

$$|B_L\rangle = p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle$$

$$|B_H\rangle = p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle$$

(cioe' quando p e q hanno diversa intensita') induce una violazione di CP. Gli autostati di CP non sono piu' autostati di massa (come abbiamo visto nei K). Quindi se $|q/p| \neq 1$, si induce una violazione di CP puramente nel mixing

Nei decadimenti semileptonici questa e' la asimmetria che si manifesta e che si misura tramite i decadimenti "wrong-sign" indotti dalle oscillazioni:

$$A_{SL} \equiv \frac{d\Gamma/dt(\bar{B}_{phys}^0 \rightarrow l^+ X) - d\Gamma/dt(B_{phys}^0 \rightarrow l^- X)}{d\Gamma/dt(\bar{B}_{phys}^0 \rightarrow l^+ X) + d\Gamma/dt(B_{phys}^0 \rightarrow l^- X)} = \frac{1 - |q/p|^4}{1 + |q/p|^4}$$

CP Puramente nel Mixing

Le misure di asimmetria di CP nei decadimenti semileptonici portano al valore

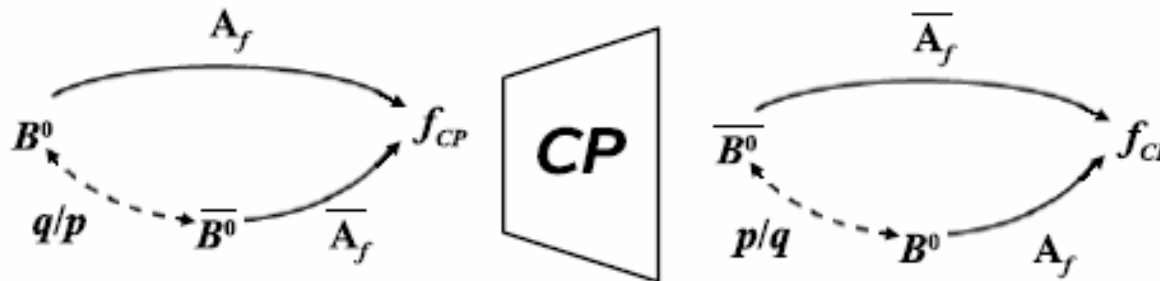
$$|q/p| = 1.0015 \pm 0.0039$$

e il Modello Standard prevede un valore <0.001

Quindi questo tipo di asimmetria di CP e' molto piccolo e alle presenti statistiche di dati possiamo trascurarlo.

Violazione di CP nell'Interferenza

Supponiamo che uno stesso stato finale f_{CP} sia raggiungibile sia da B^0 che da $\bar{B}^0$



Abbiamo quindi due ampiezze che portano allo stesso stato finale (per esempio un autostato di CP f_{CP} come $J/\psi K_S$, $\pi\pi$, ecc) :

Una e' quella del mesone “non miscelato” e l'altra quella dovuta al mixing.

L'interferenza di queste due ampiezze determina una asimmetria di CP.

$$\Rightarrow \Gamma(B_{phys}^0(t) \rightarrow f_{CP}) \neq \Gamma(\bar{B}_{phys}^0(t) \rightarrow f_{CP})$$

Produzione Coerente di Coppie $B\bar{B}$

Un caso molto importante si ha con un mesone vettoriale neutro che decade in due in due mesoni neutri pseudoscalari come ad esempio avviene nelle B (o Φ -factory) (che vedremo in seguito)

$$Y(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0, B^+B^- \text{ (50\% e 50\%)}$$

In questi casi se un B decade nello stato finale f_1 al tempo t_1 e l'altro B decade in f_2 al tempo t_2 , allora si può far vedere che il rate di decadimento di questo sistema si scrive in modo del tutto analogo al modo appena visto (per esempio per il rate del decadimento $B^0 \rightarrow f$) pur di sostituire t con $\Delta t = t_2 - t_1$

Il mesone $Y(4S)$ ha spin-parità 1^- e decade in due particelle a spin-parità 0^- . La funzione d'onda deve essere antisimmetrica.

Il sistema coerente prodotto evolve nel tempo ma ad ogni istante se un mesone è B^0 , l'altro deve essere un $\bar{B}^0$ e viceversa (effetto quantistico a distanze macroscopiche).

B_{CP} e B_{tag}

Se studiamo il decadimento in un austostato di CP (per esempio $J/\psi K_S$ oppure $\pi^+\pi^-$) come facciamo a sapere se a decadere e' stato un B^0 o un $\bar{B}^0$?

Noi possiamo considerare il resto delle tracce (cariche) e dei neutri nell'evento che provengono dall'altro B neutro. Da queste particelle cerchiamo di dare una probabilita' che a decadere sia stato un B^0 o un $\bar{B}^0$.

Esistono diverse categorie di decadimenti che permettono di estrarre informazione per identificare il B neutro. Questo procedimento si chiama di tagging. A BaBar si usano 6 categorie di tagging.

La particella usata per conoscere il flavor si chiama B di tagging (B_{tag}) mentre quello che decade nello stato di CP si chiama B_{CP} . I loro tempi di decadimenti sono t_{tag} e t_{CP} e $\Delta t = (t_{CP} - t_{tag})$

Violazione di CP nell'Interferenza

Distribuzioni temporale del decadimento f^+ (f^-) quando il B_{tag} e' un B^0 ($\bar{B}^0$) nella produzione accoppiata $B^0\bar{B}^0$ alla $Y(4S)$:

$$f_{CP,\pm}(\Delta t) = \frac{\Gamma}{4} e^{-\Gamma\Delta t} [1 \pm S_{f_{CP}} \sin \Delta m_d \Delta t \mp C_{f_{CP}} \cos \Delta m_d \Delta t]$$

Asimmetria time-dependent:

$$A_{f_{CP}}(\Delta t) = C_{f_{CP}} \cos(\Delta m_d \Delta t) - S_{f_{CP}} \sin(\Delta m_d \Delta t)$$

Con una sola ampiezza di decadimento,

$$\lambda_{f_{CP}} = \eta_{f_{CP}} \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_{f_{CP}}}{A_{f_{CP}}}$$

Diagram illustrating the components of the CP eigenvalue $\lambda_{f_{CP}}$:

- CP eigenvalue** (purple box) points to $\eta_{f_{CP}}$.
- mixing** (black box) points to $\frac{q}{p}$.
- Amplitude ratio** (red box) points to $\frac{\bar{A}_{f_{CP}}}{A_{f_{CP}}}$.

$$C_{f_{CP}} = \frac{1 - |\lambda_{f_{CP}}|^2}{1 + |\lambda_{f_{CP}}|^2}$$

$$S_{f_{CP}} = \frac{-2 \text{Im} \lambda_{f_{CP}}}{1 + |\lambda_{f_{CP}}|^2}$$

$$= 0$$

$$= -\text{Im} \lambda_{f_{CP}}$$

Violazione di CP nell'Interferenza

Notiamo che se c'è una sola ampiezza di decadimento (e quella del mixing)

allora $C_{f_{CP}} = 0$ e $S_{f_{CP}} = -\text{Im } \lambda_{f_{CP}}$

In assenza di violazione di CP, **S e C devono essere nulli.**

Queste sono le quantità che si misurano sperimentalmente.

C è non zero quando è diversa da 1 il rapporto delle ampiezze, cioè C misura quella che abbiamo chiamato violazione di CP diretta.

S misura la violazione di CP nell'interferenza tra l'ampiezza senza mixing e quella con mixing. Questa violazione di CP esiste anche in assenza delle altre due forme di violazione di CP e, come vedremo, il MS prevede per questo tipo di violazione di CP effetti vistosi.

Violazione di CP nell'Interferenza

Nella misura dei parametri di violazione di CP dipendenti dal tempo (S e C) gli errori si mantengono contenuti in quanto non si misura un rate di decadimento assoluto ma una differenza di rate per cui il contributo di molti errori di misura si cancellano.

La formula appena vista per la asimmetria TD e' quella teorica. Nei fit sui dati sperimentali bisogna tener presente che il tagging non e' perfetto e che l'apparato ha una risoluzione finita (queste cose le rivedremo quando parleremo dei risultati sperimentali!)