

Lezione 8

Stima di Parametri per Intervalli

Intervalli di Confidenza

- ❑ Stime puntuali di un parametro in talune situazioni sono del tutto inadeguate. Come per esempio quando l'incertezza statistica sulla misura è molto più grande del valore centrale stimato o stime (frequentiste) di un parametro in regioni non fisiche (comprendendo pure l'incertezza della misura). In altri casi è fondamentale tener conto delle code delle distribuzioni
- ❑ In simili situazioni si preferisce dare una stima del parametro per intervalli. Cioè ripetendo più volte l'esperimento col MC si determina la frazione di esperimenti in cui il valore vero cada in un determinato intervallo (intervalli frequentisti)
- ❑ Anche in questo caso bisogna introdurre una statistica che mi permetta di fare una stima per intervalli. Devo quindi cercare un buon stimatore per intervalli
- ❑ Vediamo ora un semplice esempio per capire il problema.

Intervalli di Confidenza

- ❑ Supponiamo di aver fatto n misure $x_1, x_2, \dots, x_n$ di una variabile casuale con distribuzione gaussiana con media μ non nota e varianza σ^2 nota.

- ❑ La stima ML di μ è data dalla media aritmetica: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

- ❑ La quantità $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ segue una distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$.

- ❑ La p.d.f. della variabile z è data da: $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

- ❑ Qual è la probabilità che z cada tra due valori scelti arbitrariamente, per esempio tra -1.96 e 1.96 ?

$$P[-1.96 < z < 1.96] = \int_{-1.96}^{+1.96} \phi(z) dz = 0.95$$

Intervalli di Confidenza

- ❑ Quindi z ha il 95% di probabilità di trovarsi tra -1.96 e 1.96
- ❑ $z > -1.96$ implica $\mu < \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ❑ $z < 1.96$ implica $\mu > \bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ❑ e quindi: $P\left[\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$ che interpreto così:
- ❑ Estruendo campioni di n misure dalla distribuzione normale con media non nota e varianza nota abbiamo il 95% di probabilità che il valore medio **vero** e **incognito** μ sia compreso nell'intervallo:
$$\left(\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
- ❑ Questo intervallo lo chiamiamo **intervallo di confidenza** ad **un livello di confidenza** di 0.95 (o del 95%)
- ❑ In modo analogo si possono calcolare intervalli di confidenza a livelli di confidenza del 90%, 99%, ecc. E si possono calcolare intervalli di confidenza non solo per la media ma anche per la varianza e per media e varianza

Intervalli di Confidenza

- ❑ Consideriamo intervalli di confidenza classici. Supponiamo di aver fatto n misure $x_1, x_2, \dots, x_n$ di una variabile casuale X
- ❑ Utilizziamo uno stimatore $\hat{\theta}$ e sia $\hat{\theta}_{oss}$ il valore stimato del parametro. Supponiamo di conoscere la p.d.f. di questo stimatore :

$$g(\hat{\theta}; \theta)$$

- ❑ Qui il valore vero θ è preso come parametro. Per ogni valore di θ riesco a calcolare la p.d.f. dello stimatore o in forma analitica e mediante simulazione Monte Carlo
- ❑ Nota la p.d.f. dello stimatore posso calcolare u_α (che dipende dal valore di θ) tale che sia α la probabilità di osservare un valore maggiore o uguale ad u_α :

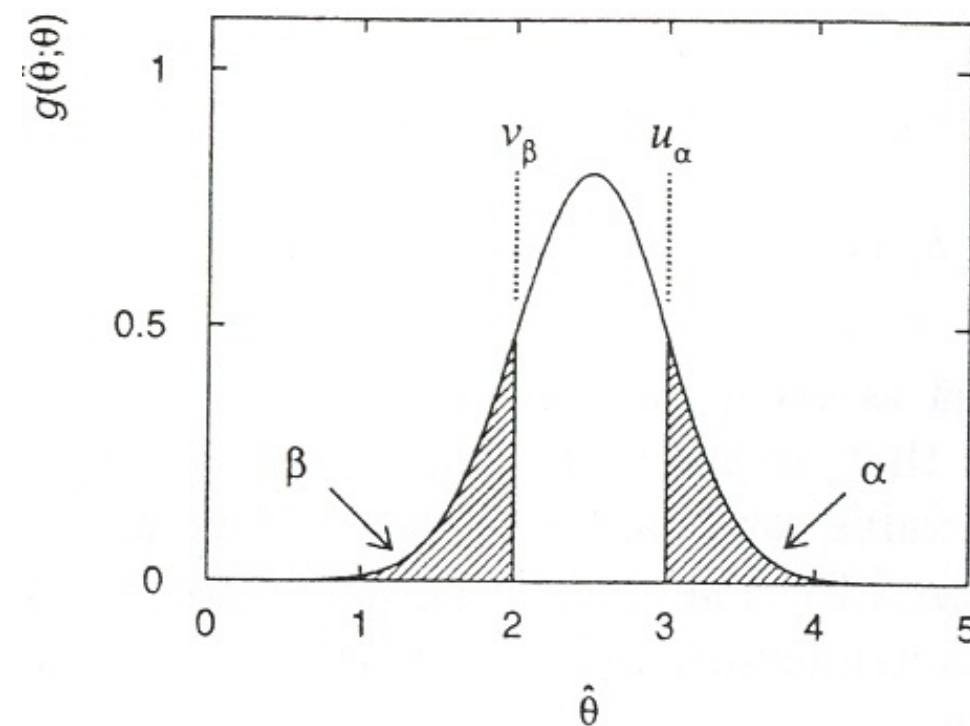
$$\alpha = P(\hat{\theta} \geq u_\alpha(\theta)) = \int_{u_\alpha(\theta)}^{\infty} g(\hat{\theta}; \theta) d\hat{\theta} = 1 - G(u_\alpha(\theta); \theta)$$

con $G(u_\alpha(\theta); \theta)$ c.d.f. dello stimatore

Intervalli di Confidenza

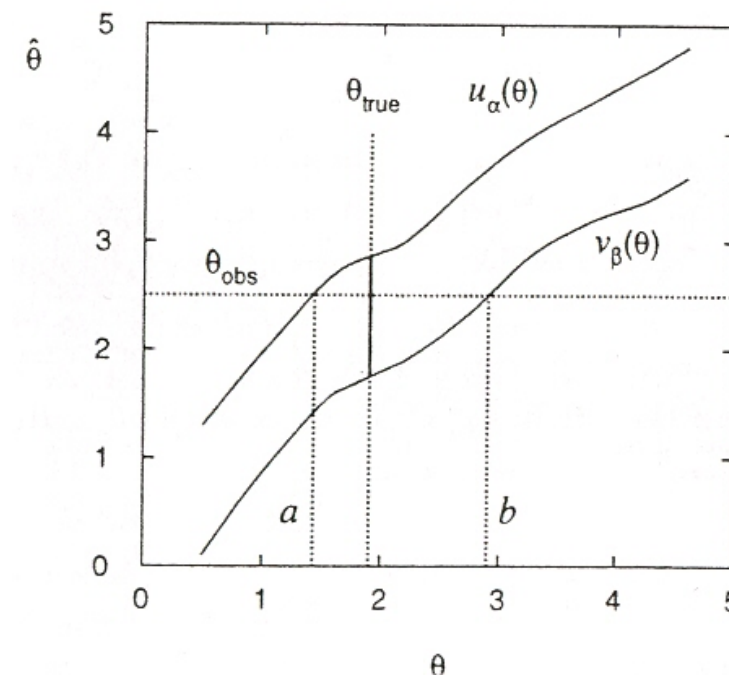
- Analogamente possiamo determinare il valore v_β tale che sia β la probabilità di osservare un valore minore o uguale a v_β :

$$\beta = P(\hat{\theta} \leq v_\beta(\theta)) = \int_{-\infty}^{v_\beta(\theta)} g(\hat{\theta}; \theta) d\hat{\theta} = G(v_\beta(\theta); \theta)$$



- Al variare di θ , u_α e v_β descrivono due curve .

Intervalli di Confidenza



- ❑ La regione compresa tra queste due curve è detta fascia di confidenza (confidence belt)
- ❑ Per costruzione si ha che per qualunque valore di θ (quindi anche per il valore stimato del parametro) vale la relazione:

$$P(v_{\beta}(\theta) \leq \hat{\theta} \leq u_{\alpha}(\theta)) = 1 - \alpha - \beta$$

Intervalli di Confidenza

- Con buoni stimatori si può assumere che le due funzioni u_α e v_β siano monotone crescenti. Invertendole si ha:

$$a(\hat{\theta}) \equiv u_\alpha^{-1}(\hat{\theta}) \quad b(\hat{\theta}) \equiv v_\beta^{-1}(\hat{\theta})$$

- $\hat{\theta} \geq u_\alpha(\theta)$ implica $a(\hat{\theta}) \geq \theta$ e $\hat{\theta} \leq v_\beta(\theta)$ implica $b(\hat{\theta}) \leq \theta$

- Da queste relazioni segue che $P(a(\hat{\theta}) \geq \theta) = \alpha$ e $P(b(\hat{\theta}) \leq \theta) = \beta$

- E quindi: $P(a(\hat{\theta}) \leq \theta \leq b(\hat{\theta})) = 1 - \alpha - \beta$

- Si noti che queste relazioni valgono indipendentemente dal valore vero di θ che non è conosciuto.

- Se indichiamo con a e b i valori corrispondenti al valore del parametro effettivamente osservato θ_{oss} (vedi la figura slide precedente) allora si ha

$$P(a \leq \theta_{\text{vero}} \leq b) = 1 - \alpha - \beta$$

Intervalli di Confidenza

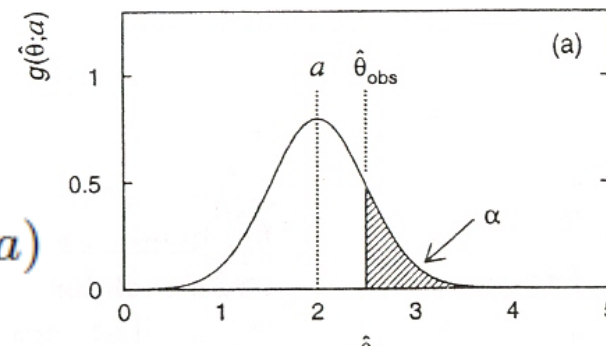
- ❑ L'intervallo $[a, b]$ è detto **intervallo di confidenza** ad un **livello di confidenza (CL) di $1 - \alpha - \beta$**
- ❑ Frequentisticamente significa che ripetendo più volte l'esperimento in una frazione $1 - \alpha - \beta$ (probabilità di copertura) di esperimenti il valore vero del parametro θ sarà contenuto nell'intervallo $[a, b]$
- ❑ L'intervallo di confidenza non è univocamente determinato dal livello di confidenza. La scelta spesso adottata è di prendere $\alpha = \beta = \gamma/2$. Un intervallo di questo tipo è detto **intervallo di confidenza centrale** con un **livello di confidenza $1 - \gamma$**
- ❑ Si noti che dall'uguaglianza $\alpha = \beta$ non significa che a e b siano equidistanti dal valore stimato !

Intervalli di Confidenza da un lato

- Talvolta sono richiesti intervalli di confidenza da un solo lato. Ad esempio a è il valore vero del parametro θ e θ_{oss} il valore osservato. Sia α la probabilità di osservare valori del parametro maggiore di quello effettivamente trovato θ_{oss} . a in questo caso è il limite inferiore dell'intervallo di confidenza. **CL = 1 - α**

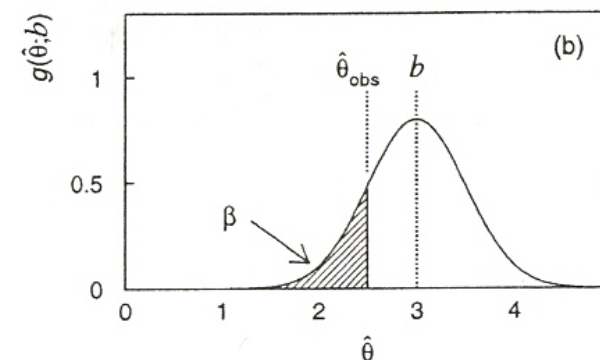
- Per determinare questo limite inferiore bisogna risolvere per a la relazione:

$$\alpha = \int_{\hat{\theta}_{\text{oss}}}^{\infty} g(\hat{\theta}; a) d\hat{\theta} = 1 - G(\hat{\theta}_{\text{oss}}; a)$$



- Analogamente si determina un limite superiore risolvendo per b :

$$\beta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{\text{oss}}} g(\hat{\theta}; b) d\hat{\theta} = G(\hat{\theta}_{\text{oss}}; b)$$



Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana

- ❑ Primo caso importante: la p.d.f. dello stimatore segue una distribuzione gaussiana. Supponiamo che di questo stimatore **conosciamo** la varianza mentre dobbiamo stimare il suo valore
- ❑ Questa c.d.f. può essere scritta mediante la c.d.f. della gaussiana standard

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - G(\hat{\theta}_{oss}; a, \sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{oss} - a}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right) \\ \beta = G(\hat{\theta}_{oss}; b, \sigma_{\hat{\theta}}) = \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_{oss} - b}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right) \end{array} \right.$$

- ❑ Quindi l'intervallo di confidenza $[a, b]$ ad un CL di $1 - \alpha - \beta$ si ottiene risolvendo per a e b le due equazioni (vedi slide precedente):

Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana

- Utilizzando i quantili della gaussiana standard Φ (che si ottengono invertendo questa funzione) si ha:

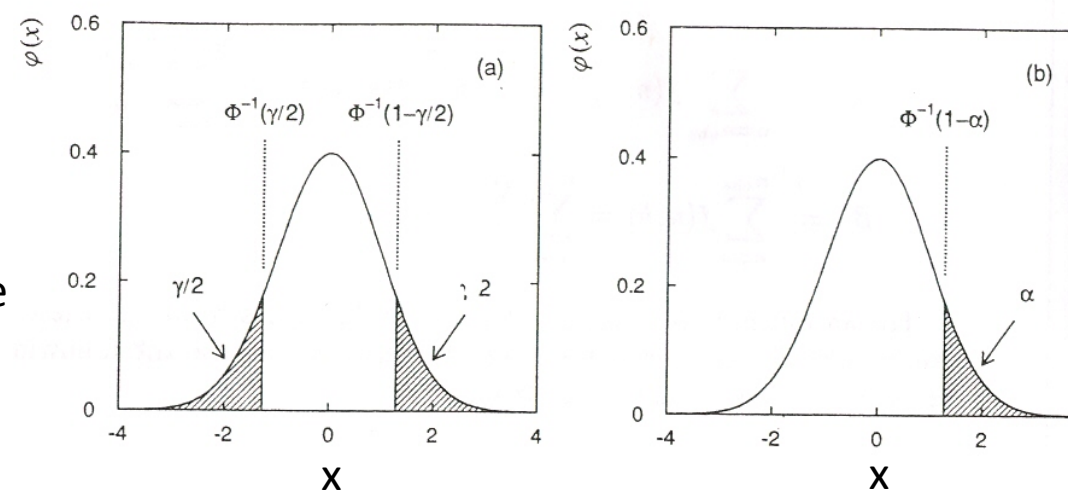
$$a = \hat{\theta}_{oss} - \sigma_{\hat{\theta}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$b = \hat{\theta}_{oss} + \sigma_{\hat{\theta}} \Phi^{-1}(1 - \beta)$$

Per simmetrizzare le soluzioni si sfrutta il fatto che $\Phi^{-1}(\beta) = - \Phi^{-1}(1-\beta)$

Fig. a: Relazione tra quantile Φ^{-1} e CL per un intervallo di confidenza centrale

Fig. b : Relazione tra quantile Φ^{-1} e CL per intervallo di confidenza da un solo lato



Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana

- ❑ Consideriamo intervalli centrali : $\alpha = \beta = \gamma/2$. Il CL = $1 - \gamma$ spesso è dato per valori interi (e piccoli) del quantile $\Phi^{-1}(1 - \gamma/2) = 1, 2, 3, \dots$
- ❑ Analogamente per un intervallo di confidenza ad un solo lato il CL = $1 - \alpha$ è dato per valori interi piccoli di $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$

$\Phi^{-1}(1 - \gamma/2)$	$1 - \gamma$	$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - \alpha$
1	0.6827	1	0.8413
2	0.9544	2	0.9772
3	0.9973	3	0.9987

- ❑ L'intervallo di confidenza centrale col quantile uguale ad 1 corrisponde all'intervallo di una σ attorno al valore osservato (area sotto la curva pari al 68.3%); col quantile uguale a 2 corrisponde ad un intervallo a 2 σ , ecc
- ❑ http://www.tutor-homework.com/statistics_tables/statistics_tables.html

Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana

- ❑ Un altro modo di dare l'intervallo di confidenza centrale è di considerare intervalli di confidenza con CL di 0.90, 0.95, 0.99. (90%, 95%, 99%). A questi livelli di confidenza corrispondono quantili pari a 1.645, 1.960 e 2.576 .
- ❑ Analogamente per intervallo di confidenza ad un solo lato (a destra) con CL del 90%, 95%, 99% . I quantili in questi casi sono 1.282, 1.645 e 2.326

$1 - \gamma$	$\Phi^{-1}(1 - \gamma/2)$	$1 - \alpha$	$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$
0.90	1.645	0.90	1.282
0.95	1.960	0.95	1.645
0.99	2.576	0.99	2.326

Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana (ma con Varianza non nota)

- ❑ Supponiamo ora che la varianza dello stimatore non sia nota a priori ma calcolata dai dati.
- ❑ In questo la varianza dipende dallo stimatore. La c.d.f. dello stimatore (dove al posto della varianza nota si mette quella stimata dai dati) non ha relazione semplice con la c.d.f. della gaussiana standard. E non potremmo usare i risultati appena visti (dove la varianza è supposta nota)
- ❑ Se la statistica del campione è molto elevata allora possiamo benissimo usare la varianza calcolata dai dati e utilizzare il procedimento appena visto con l'uso dei quantili della gaussiana standard

Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana (ma con Varianza non nota)

- ❑ Se il campione è di dimensioni piccole (n misure) possiamo considerare le due variabili Z e U.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- ❑ Anche se non conosciamo σ , questa variabile segue una distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$

- ❑ La variabile U è definita così: $U = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ dove s^2 è la varianza del campione :

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

- ❑ La variabile U segue una distribuzione del χ^2 con $n - 1$ gradi di libertà

Intervalli di Confidenza per Stimatori a Distribuzione Gaussiana (ma con Varianza non nota)

- ❑ Le due variabili Z e U sono tra di loro indipendenti ed il loro rapporto è una variabile casuale che segue una distribuzione t di Student con $n - 1$ dof:

$$t = \frac{z}{\sqrt{u/(n-1)}} = \frac{(\bar{x} - \mu)/\sigma/\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

- ❑ La distribuzione t di Student è simmetrica attorno al valore $t = 0$ e per questo motivo generalmente l'intervallo centrale è preso simmetrico attorno a questo valore :

$$P\left(-b \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq +b\right) = \int_{-b}^{+b} f(t; n-1) dt = 1 - \gamma$$

- ❑ Questa si può scrivere anche così: $P\left(\bar{x} - b \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + b \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \gamma$

dove $1 - \gamma$ è il livello di confidenza scelto. Fissato il $CL = 1 - \gamma$, b viene determinato dalle tavole (dei valori critici) di t.

Esempio

- Un test su 25 professori mostra un quoziente di intelligenza (QI) di 128 con una deviazione standard di 15. Quali sono i limiti dell'intervallo di confidenza con un livello di confidenza del 95% sul valore vero del valore medio di QI di tutti i professori?

Con scelta casuale dei professori, l'errore stimato sulla media sarebbe $15/\sqrt{25}$ cioè 3. Assumendo una distribuzione gaussiana il quantile corrispondente al CL di 0.95 è 1.96. Quindi avrei il seguente intervallo $[128 - 3 \cdot 1.96, 128 + 3 \cdot 1.96]$ cioè :

[122.1, 133.9]

Usando la la distribuzione t di Student, il dof = 24 e il valore critico per il CL del 95% con questo numero di gradi di libertà è 2.06. In questo caso l'intervallo di confidenza al 95% è:

[121.8, 134.2]

Intervalli di Confidenza con Stimatori a Distribuzione Poissoniana

- ❑ In una distribuzione poissoniana (come in generale nelle distribuzioni discrete) gli integrali nelle equazioni che definiscono la fascia di confidenza devono essere sostituiti da sommatorie
- ❑ Inoltre date le due probabilità α e β non sempre è possibile invertire le due equazioni e trovare i limiti a e b dell'intervallo di confidenza
- ❑ Possiamo invertire le due equazioni richiedendo che α sia uguale alla probabilità che lo stimatore dia un valore **uguale o maggiore** a quello effettivamente osservato. Analogamente β deve essere alla probabilità che lo stimatore dia un valore **uguale o minore** a quello effettivamente osservato
- ❑ Questo meccanismo allarga (per invertire le due equazioni) l'intervallo di confidenza **sovrastimandolo**

Intervalli di Confidenza con Stimatori a Distribuzione Poissoniana

- Supponiamo che il valore osservato di una variabile poissoniana sia n_{oss}

Si ha quindi:

$$\alpha = P(\hat{\nu} \geq \hat{\nu}_{oss}; a)$$

$$\beta = P(\hat{\nu} \leq \hat{\nu}_{oss}; b)$$

- Queste equazioni diventano:

$$\alpha = \sum_{n=n_{oss}}^{\infty} f(n; a) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{oss}-1} f(n; a) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{oss}-1} \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

$$\beta = \sum_{n=0}^{n_{oss}} f(n; b) = \sum_{n=0}^{n_{oss}} \frac{b^n}{n!} e^{-b}$$

- Dati n_{oss} , α e β , queste equazioni si possono invertire, determinando a e b . Per questo calcolo si può usare la relazione:

$$\sum_{n=0}^{n_{oss}} \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} = \int_{2\nu}^{\infty} f_{\chi^2}(z; n_d = 2(n_{oss} + 1)) dz$$

$$= 1 - F_{\chi^2}(2\nu; n_d = 2(n_{oss} + 1))$$

Intervalli di Confidenza con Stimatori a Distribuzione Poissoniana

dove f_{χ^2} e F_{χ^2} sono p.d.f. e c.d.f. del χ^2 con n_d dof

□ Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$a = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(\alpha; nd = 2n_{oss})$$

$$b = \frac{1}{2} F_{\chi^2}^{-1}(1 - \beta; nd = 2(n_{oss} + 1))$$

□ Osservando $n = 0$ il limite inferiore dell'intervallo non può essere calcolato.

□ In questo caso il limite superiore b si calcola con $\beta = \sum_{n=0}^0 \frac{b^n e^{-b}}{n!}$ che si riduce a $b = -\log \beta$. Con un CL del 90% ($\beta=0.10$), si ha $b = 2.30$. Questo rappresenta il limite superiore ad un livello del 90% nel caso che in un processo poissoniano si osservino 0 eventi

Limiti Poissoniani

	Inferiore			Superiore		
	90%	95%	99%	90%	95%	99%
$n = 0$	—	—	—	2.30	3.00	4.61
$n = 1$	0.11	0.05	0.01	3.89	4.74	6.64
$n = 2$	0.53	0.36	0.15	5.32	6.30	8.41
$n = 3$	1.10	0.82	0.44	6.68	7.75	10.05
$n = 4$	1.74	1.37	0.82	7.99	9.15	11.60
$n = 5$	2.43	1.97	1.28	9.27	10.51	13.11
$n = 6$	3.15	2.61	1.79	10.53	11.84	14.57
$n = 7$	3.89	3.29	2.33	11.77	13.15	16.00
$n = 8$	4.66	3.98	2.91	12.99	14.43	17.40
$n = 9$	5.43	4.70	3.51	14.21	15.71	18.78
$n = 10$	6.22	5.43	4.13	15.41	16.96	20.14

Limiti inferiori e superiori per diversi valori di n osservati

Intervalli di Confidenza con Funzioni ML o χ^2

- La p.d.f. di uno stimatore di ML di un grande campione di dati è gaussiana:

$$g(\hat{\theta}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\theta}}^2}} e^{-\left(\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right)}$$

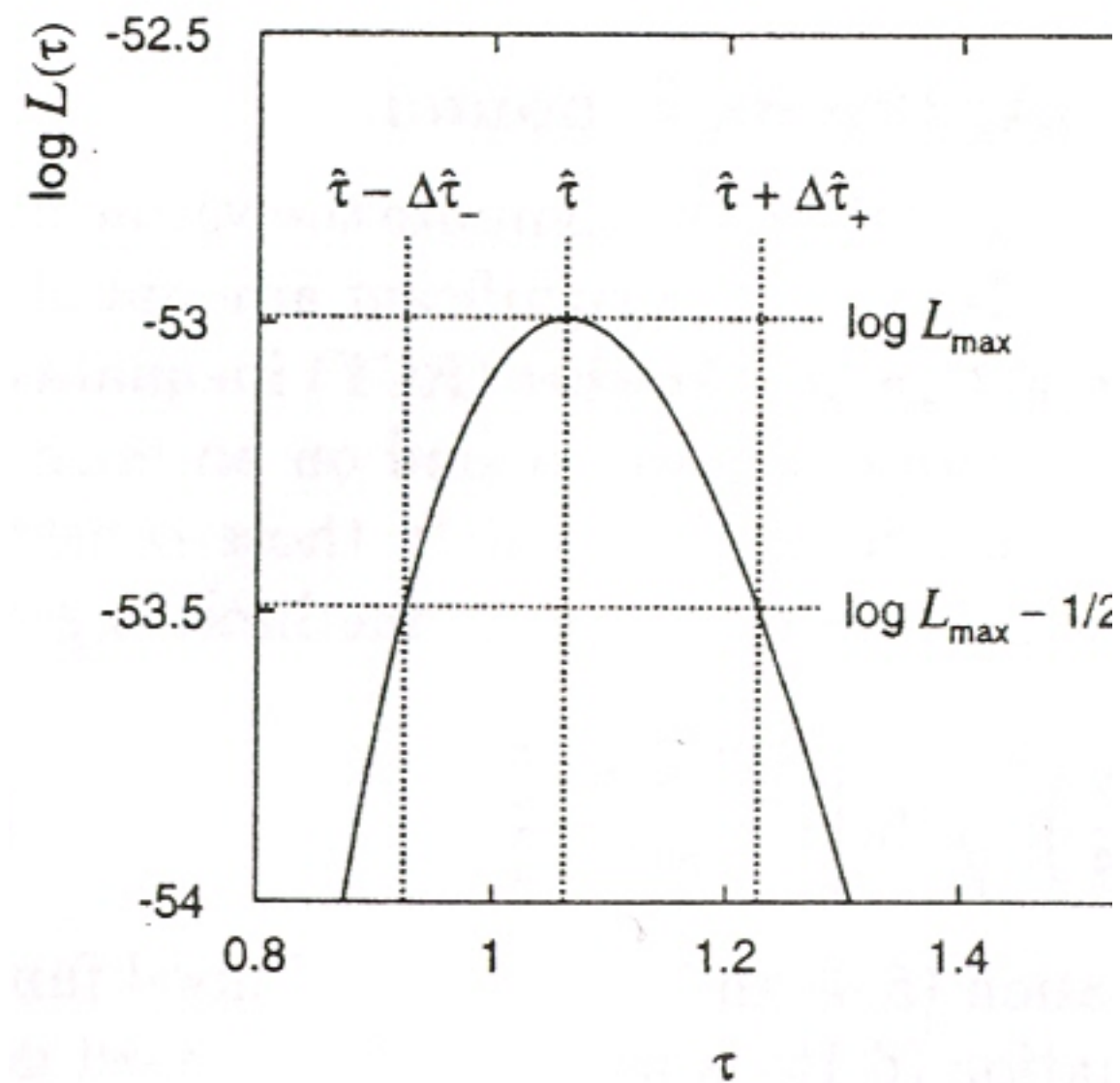
- In queste condizioni limite anche la funzione di likelihood ha una distribuzione gaussiana attorno al valore stimato con la stessa varianza della p.d.f. dello stimatore:

$$L(\theta) = L_{max} e^{-\left(\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}\right)}$$

- Noi abbiamo già visto che diminuendo di $N^2/2$ il valore di $\log L$ dal suo valore massimo il parametro θ varia di $\pm N$ deviazioni standard:

$$\log L(\hat{\theta} \pm N\sigma_{\hat{\theta}}) = \log L_{max} - \frac{N^2}{2}$$

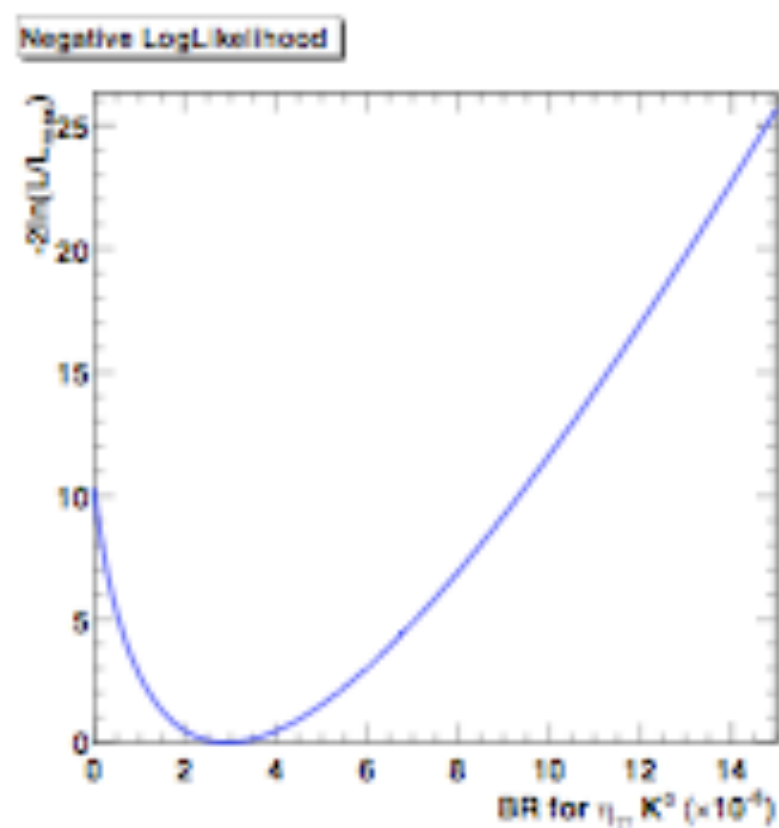
Intervallo di Confidenza con ML



Intervalli di Confidenza con Funzioni ML o χ^2

- ❑ Quindi se mi abbasso di 0.5 rispetto al massimo, i punti sulla logL danno un intervallo centrale di confidenza al CL del 68% ($\pm 1 \sigma$). Se mi abbasso di 1.645/2 ottengo un intervallo al 90% CL, ecc
- ❑ Se il campione di dati non è elevato la logL non è gaussiana. Allora l'intervallo $[a, b]$ non è simmetrico e si scrive : $[a, b] = [\hat{\theta} - c, \hat{\theta} + d]$
dove $\log L(\hat{\theta}_{-c}^{+d}) = \log L_{max} - \frac{N^2}{2}$
- ❑ Considerazioni analoghe valgono con il χ^2 : $\chi^2(\hat{\theta}_{-c}^{+d}) = \chi_{min}^2 + N^2$

Esempio di Likelihood non Gaussiana



Se il campione di dati non è sufficientemente elevato, la LF L non è gaussiana e la $\log L$ non è parabolica: gli intervalli di confidenza che si ottengono sono asimmetrici

Limiti Sulla Media di Variabile Poissoniana

- ☐ Abbiamo già visto i limiti di una variabile poissoniana ma il campione di dati era pensato costituito solo da eventi di segnale mentre spesso il campione di dati contiene eventi di segnale ed eventi di fondo
- ☐ Eventi di fondo somigliano al segnale e sono presi come segnale.
- ☐ Se n_s è il numero di segnali e n_b il numero di eventi di fondo, il numero totale di eventi del campione è: $n = n_s + n_b$
- ☐ n_s e n_b sono variabili poissoniane con valori medi v_s e v_b
- ☐ Supponiamo di sapere (per esempio tramite eventi MC) che v_b sia noto e con incertezza zero! (Se questo non è vero il problema si complica)
- ☐ Se osservo n eventi e so che in media v_b sono da considerare fondo, quali sono gli intervalli di confidenza che mi aspetto per v_s ?

Limiti Sulla Media di Variabile Poissoniana

- La variabile n segue questa distribuzione poissoniana:

$$f(n; \nu_s, \nu_b) = \frac{(\nu_s + \nu_b)^n}{n!} e^{-(\nu_s + \nu_b)}$$

- ν_b è noto, la stima per ν_s è data da: $\hat{\nu}_s = n - \nu_b$

- L'intervallo centrale di confidenza con n_{oss} eventi osservati si ha risolvendo per ν_s^{lo} e ν_s^{up} le equazioni:

$$\alpha = P(\hat{\nu}_s \geq \hat{\nu}_s^{oss}; \nu_s^{lo}) = \sum_{n \geq n_{oss}} \frac{(\nu_s^{lo} + \nu_b)^n e^{-(\nu_s^{lo} + \nu_b)}}{n!}$$

$$\beta = P(\hat{\nu}_s \leq \hat{\nu}_s^{oss}; \nu_s^{up}) = \sum_{n \leq n_{oss}} \frac{(\nu_s^{up} + \nu_b)^n e^{-(\nu_s^{up} + \nu_b)}}{n!}$$

- Tenendo presenti le soluzioni già trovate nel caso di fondo nullo, allora la soluzione di questo sistema di equazioni è :

Limiti Sulla Media di Variabile Poissoniana

$$\nu_s^{lo} = \nu_s^{lo}(\text{senza fondo}) - \nu_b$$

$$\nu_s^{up} = \nu_s^{up}(\text{senza fondo}) - \nu_b$$

- ❑ Se il numero totale di eventi osservati n_{oss} non è grande rispetto al valore atteso degli eventi di fondo, le fluttuazioni negli eventi di segnale e di fondo possono portare a valori negativi del numero di segnale (ed eventualmente dell'intero intervallo di confidenza) !
- ❑ Questo vuol dire che si sta cercando un segnale in un campione che non ha la sensibilità adeguata per la misura che si vuole fare
- ❑ Problema analogo si ha quando si misura una grandezza fisica che ha valore ~nullo (tipo la massa del neutrino) per il quale lo stimatore stima un valore negativo (non fisico)

Stimatori Bayesiani di Intervalli

- ❑ In senso frequentista io rifaccio una misura tante volte e in una frazione del 95% di casi il **valore vero e non noto**, si trova in questo intervallo:

$$P\left[\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

- ❑ Dal punto di vista bayesiano ciò non ha senso perché l'esperimento non è ripetibile. La quantità che sto misurando non ha un valore vero ma è una variabile casuale la cui distribuzione riflette il grado di fiducia che io associo al valore della variabile. Questa distribuzione è data da:

$$\pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta)\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)}{\int_{\theta} \pi(\theta)\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)d\theta}$$

essendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ le n misure fatte della variabile X

- ❑ La probabilità che il valore θ da stimare sia compreso tra $[a, b]$ ad un livello di confidenza γ è dato da :
$$P(a \leq \theta \leq b) = \int_a^b \pi(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta = \gamma$$

Stimatori Bayesiani di Intervalli

- ❑ Questo intervallo $[a, b]$ è detto intervallo bayesiano di confidenza ad un livello di confidenza γ (o anche intervallo di credibilità con probabilità γ)
- ❑ La condizione vista non individua l'intervallo in modo univoco. Spesso a questa condizione si aggiunge che la distanza $b-a$ sia minima
- ❑ Nella distribuzione finale spesso la distribuzione iniziale è presa costante. Per esempio la si prende uguale ad 1 in zona fisica e zero altrove. Questa costante insieme al denominatore (costante) è inserita nella normalizzazione ad 1 della likelihood
- ❑ In questo modo la p.d.f. finale diviene la funzione di likelihood e l'intervallo bayesiano si ottiene integrando la likelihood nell'intervallo considerato

$$P(a \leq \theta \leq b) = \int_a^b \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) d\theta = \gamma$$

Stimatori Bayesiani di Intervalli

- ❑ Un limite superiore (bayesiano) al CL di γ si ottiene integrando la likelihood normalizzata ad 1 dallo zero sino al punto A in modo tale che l'area integrata sia una frazione γ della area totale sotto la likelihood:

$$\int_0^A \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) d\theta = \gamma$$

- ❑ Se la likelihood ha iniziali valori negativi l'integrazione è fatta a partire dai valori positivi della likelihood
- ❑ Si noti che nella statistica frequentista bisogna prima definire uno stimatore e poi col suo tramite si costruisce l'intervallo di confidenza
- ❑ Nella statistica bayesiana non è necessario introdurre uno stimatore e l'intervallo di confidenza è estratto direttamente dai dati mediante la likelihood

Stimatori Bayesiani di Intervalli

- ❑ Inoltre la statistica frequentista non utilizza affatto l'informazione iniziale
Quindi se il parametro da stimare è il $\cos\theta$ il bayesiano pone costante la prior tra -1 e 1 e 0 altrove. Il frequentista non pone alcuna condizione.
- ❑ In questo modo per piccoli campioni di dati al frequentista può venire un intervallo in zona completamente "non fisica"
- ❑ In generale per grandi campioni di dati la distribuzione finale è dominata dalla likelihood e gli intervalli di confidenza ottenuti con i due metodi sono confrontabili tra di loro
- ❑ Questo non sempre è vero e comunque non è generalmente vero per piccoli campioni per i quali gli intervalli di confidenza calcolati possono essere molto diversi
- ❑ Bisogna sempre dire come è stato calcolato l'intervallo di confidenza e se calcolato in modo bayesiano bisogna specificare il tipo di prior utilizzata