

Lezione 10

Confronto Teoria-Esperimento

Funzione di Risoluzione

- ❑ Il valore di qualunque quantità fisica misurata da un rivelatore non coincide di fatto mai col valore vero della quantità misurata a causa degli inevitabili errori di misura sperimentali. Quindi un vertice di decadimento vero (simulato) di una particella $V(x, y, z)$ viene ricostruito come $V(x_1, y_1, z_1)$. Noi diciamo che il rivelatore ha una risoluzione finita.
- ❑ Il rivelatore è detto di risoluzione infinita se il valore della quantità misurata coincide col valore vero (rivelatore ideale).
- ❑ Sia $f(x;\theta)$ la p.d.f. vera di una variabile casuale X . Di un valore vero x della variabile X il rivelatore misura x' . La funzione $r(x';x)$ che dà la distribuzione dei valori misurabili x' per un dato valore vero x è detta funzione di risoluzione (del rivelatore) per la variabile X .
- ❑ La p.d.f. della quantità misurata x' è data da :

Funzione di Risoluzione

$$f'(x'; \theta) = \int f(x; \theta) r(x'; x, a) dx = f(x; \theta) \otimes r(x'; x, a)$$

essendo a uno (o più) parametri da cui dipende la funzione di risoluzione.
Questo è un integrale di convoluzione

- ❑ Noi diciamo che la p.d.f. $f(x; \theta)$ (vera) è stata “smeared out” nella p.d.f. $f'(x'; \theta)$
- ❑ Si dice anche che la p.d.f. vera $f(x; \theta)$ è stata “folded in” (smeared)
(o convoluta) con la funzione di risoluzione.
- ❑ Il processo (inverso) di estrazione della p.d.f. vera $f(x; \theta)$ dalla $f'(x'; \theta)$ è detto unfolding (o anche unsmearing)
- ❑ La funzione di risoluzione $r(x'; x)$ può essere determinata utilizzando eventi simulati

Funzione di Risoluzione

- ❑ Posso simulare (tecnica MC) un evento in cui una certa variabile X ha valore x e poi ricostruisco l'evento nel rivelatore e misuro il valore x' .
- ❑ Distribuisco la differenza $x' - x$ per un sufficiente numero di eventi simulati. Generalmente questa differenza segue una distribuzione gaussiana (o somma di due o più gaussiane):

$$r(x'; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x' - x}{R} \right)^2 \right]$$

- ❑ In questo caso la funzione di risoluzione dipende da un solo parametro R che io determino dal fit sulla distribuzione sperimentale delle differenze $x' - x$
- ❑ Determinata la funzione di risoluzione, devo calcolare l'integrale di convoluzione visto sopra. Questo in casi particolari si calcola analiticamente. In genere si calcola numericamente.

p.d.f. Esponenziale e Funzione di Risoluzione Gaussiana

- ❑ La variabile casuale X abbia una p.d.f. di tipo esponenziale:

$$f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (x \geq 0)$$

e la funzione di risoluzione sia gaussiana su tutto il range di variabilità di x.

- ❑ Allora si ha (smearing):

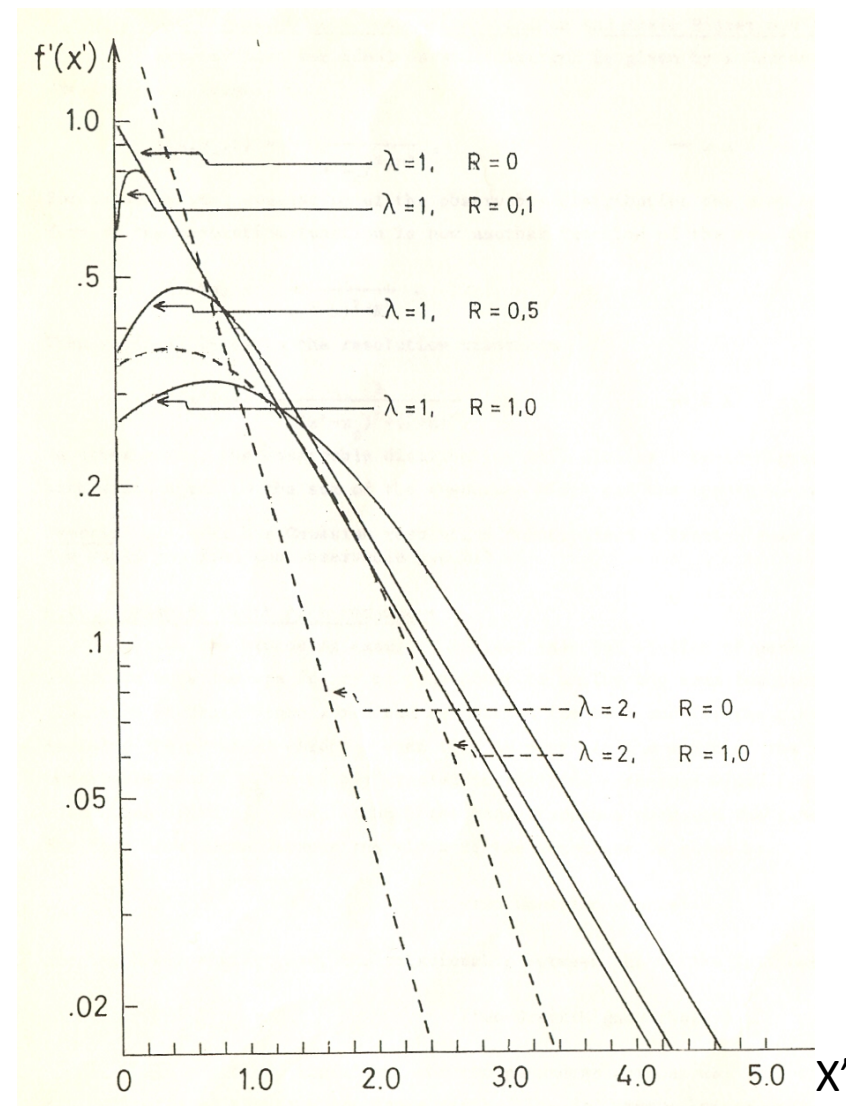
$$f'(x') \simeq \int_0^\infty \lambda \exp[-\lambda x] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x' - x}{R} \right)^2 \right] dx$$

- ❑ Questo integrale si calcola analiticamente e vale:

$$f'(x') \simeq \exp [(\lambda R)^2 / 2] \cdot G \left(\frac{x'}{R} - \lambda R \right) \cdot \lambda \exp(-\lambda x')$$

dove G è la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard

p.d.f. Esponenziale e Funzione di Risoluzione Gaussiana



Effetto della funzione di
risoluzione sulle p.d.f. non
alterate ($R=0$) per diversi
valori della costante λ
(scala logaritmica)

p.d.f. Gaussiana e Funzione di Risoluzione Gaussiana

□ p.d.f. : $f(x; x_0, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right] \quad [-\infty \leq x \leq +\infty]$

□ Funzione di risoluzione gaussiana:

$$r(x'; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x' - x}{R} \right)^2 \right]$$

□ Soluzione dell'integrale di convoluzione:

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + R^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x' - x_0}{\sqrt{\sigma^2 + R^2}} \right)^2 \right]$$

□ Anche x' ha una distribuzione gaussiana ma con una varianza data somma della varianza della p.d.f. originaria più la varianza della funzione di risoluzione

Accettanza di Rivelazione

- ❑ Spesso l'apparato sperimentale non riesce a coprire tutto l'angolo solido. Ci sono zone dove il rivelatore è cieco! Ciò è dovuto o a impossibilità di realizzare un rivelatore totalmente ermetico oppure ai costi necessari e proibitivi o al fatto che i vantaggi del rivelatore ermetico non compensano i costi e gli sforzi per rendere il rivelatore ermetico.
- ❑ L'accettanza del rivelatore è data dalla regione spaziale (o dalla regione di spazio fasi) nella quale il rivelatore è sensibile.
- ❑ Sia $f(x;\theta)$ la p.f.d. del modello (teorico) già (eventualmente) convoluta con la funzione di risoluzione. La variabile X sia definita tra $-\infty$ e $+\infty$ mentre la regione di accettazione del rivelatore sia compresa tra A e B . La p.d.f. $f'(x;\theta)$, troncata alla regione $[A,B]$, è data da:

$$f'(x;\theta) = \frac{f(x;\theta)}{\int_A^B f(x;\theta)dx} = \frac{f(x;\theta)}{F(B) - F(A)}$$

Efficienza di Rivelazione

- ❑ Il rivelatore all'interno della regione di accettazione può avere una efficienza di rivelazione che varia con la posizione nello spazio delle fasi disponibile.
- ❑ Per un qualunque confronto tra modello teorico e dati sperimentali bisogna correggere per la distorsione introdotta dalle variazioni della efficienza di rivelazione.
- ❑ Per fare questo posso o correggere il modello teorico oppure correggere i dati sperimentali.
- ❑ Nel primo caso posso determinare la efficienza di rivelazione della variabile X nel valore misurato x . Questa efficienza in generale dipende dal valore x della variabile X ma anche dal valore di una (o più) variabile Y ($Y_1, Y_2, \dots$) che possono essere correlate con X .
- ❑ L'efficienza di rivelazione $D(x,y)$ è una caratteristica del rivelatore. Posso determinarla con eventi simulati, indipendentemente dai dati sperimentali, come rapporto tra numero di eventi ricostruiti e numero di eventi simulati in corrispondenza ai valori x e y .

Efficienza di Rivelazione

- ❑ Per correggere la p.d.f. teorica devo inoltre conoscere la probabilità condizionale che la variabile Y assuma un valore y una volta dato x :

$$f'(x; \theta) = \frac{\int f(x; \theta) D(x, y) P(y|x) dy}{\int \int f(x; \theta) D(x, y) P(y|x) dy dx}$$

Qui integriamo sui valori assunti dalla variabile Y perchè non siamo interessati ai suoi valori.

- ❑ La probabilità condizionale può essere particolarmente difficile da ottenere prima di aver fatto le misure (o addirittura impossibile in quanto dipendente da qualche ipotesi fisica non conosciuta prima di fare l'esperimento).
- ❑ In questi casi $P(y|x)$ può essere determinata utilizzando un campione di dati sperimentali. Questo comporta necessariamente un aumento dell'incertezza statistica sul valore del modello teorico da stimare θ .

Efficienza di Rivelazione

- ❑ In alcune casi l'efficienza di rivelazione dipende solo dal valore misurato della osservabile X . In questi casi la p.d.f. ideale corretta è data da:

$$f'(x; \theta) = \frac{f(x; \theta) D(x)}{\int f(x; \theta) D(x) dx}$$

dove $D(x)$ è l'efficienza di rivelazione per la misura x della variabile X .

- ❑ Un modo diverso di affrontare e risolvere il problema legato ad efficienze di rivelazioni variabili da punto a punto è quello di pesare i punti con l'inverso della propria efficienza di rivelazione.
- ❑ Data la misura x_i , determiniamo il peso w_i di questa misura considerato come l'inverso della efficienza di rivelazione di x_i :

$$w_i = \frac{1}{D(x_i, y_i)}$$

Efficienza di Rivelazione

- ❑ Le misure pesate vengono confrontate col modello teorico per estrarre il parametro θ che si sta stimando.
- ❑ La tecnica di pesare gli eventi nel modo descritto è quella più usata nella pratica. Esempi comuni di questa tecnica si hanno nelle analisi in onde parziali o nei Dalitz plot. I pesi sono determinati mediante simulazione di eventi