

Oscillazioni

Un sistema oscillante è un sistema la cui dinamica si sviluppa intorno ad un punto di equilibrio stabile, caratterizzato da una osservabile il cui valore varia periodicamente nel tempo sotto l'azione combinata di una inerzia e di un richiamo, ed eventualmente di una forzante esterna e dell'attrito.

Questi fenomeni non si limitano alla meccanica (palline, molla e poco altro) ma si ritrovano nel suono, nelle onde elettromagnetiche, in chimica,

Dinamica del punto materiale
Forza elastica

Equilibrio statico

Applichiamo a P una forza \vec{F}_1 costante che mantenga la molla tesa con uno spostamento costante $(l - l_0) = x$

I punti P e Q sono fermi

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$
 Applicata dall'esterno Forza elastica $-kx$ Forza elastica $+kx$ Reazione vincolare

Poiché anche la molla nel suo insieme è ferma la risultante delle forze esterne deve essere nulla:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_4$$

Per mantenere una molla libera deformata di una quantità x dobbiamo applicare agli estremi due forze uguali e contrarie di modulo kx

Dinamica del punto materiale
Forza elastica

"Forza elastica": una forza del tipo $\vec{F}(x) = -kx \vec{u}_x$
 $k > 0$ costante elastica

→ Il modulo della forza è proporzionale allo spostamento x
 → Il verso è sempre opposto a quello dello spostamento

Esempio: punto materiale all'estremo di una "molla" (senza massa): $F = -k(l - l_0) = -kx$
 (moto monodimensionale) lunghezza a riposo

Accelerazione: lungo asse x

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

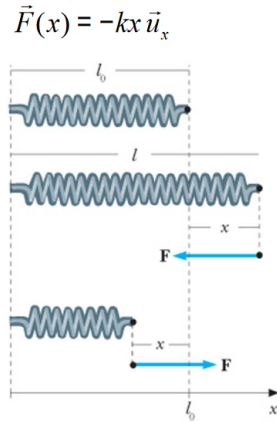
→ Moto armonico semplice, con $\omega_p^2 = \frac{k}{m}$

Pulsazione e periodo: $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Determinati dalla costante elastica e dalla massa del punto

Avete già visto questo argomento con il prof Bersanelli:
<http://cosmo.fisica.unimi.it/didattica/corsi/meccanica/#partell>

Forza elastica



$$\vec{F}(x) = -kx \vec{u}_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Equazione del moto?

$$x = A \sin(\omega_p t + \varphi) \quad \text{con } \omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equazione della velocità?

$$v = \omega_p A \cos(\omega_p t + \varphi)$$

Se assumiamo condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\longrightarrow A \sin \varphi = x_0 \\ v(0) = 0 &\longrightarrow \omega_p A \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi = \pi/2, \quad A = x_0$$

$$x = x_0 \sin(\omega_p t + \pi/2) = x_0 \cos(\omega_p t)$$

$$v = -\omega_p x_0 \sin(\omega_p t)$$

Forza elastica

Supponiamo una velocità iniziale non nulla:

$$x(0) = x_0 \quad v(0) = v_0$$

$$A \sin \varphi = x_0 \quad \omega_p A \cos \varphi = v_0$$

→ Avremo ancora moto armonico

$$x = A \sin(\omega_p t + \varphi)$$

ma con valori diversi di ampiezza e fase iniziale

Fase iniziale:

$$\frac{\sin \varphi}{\omega_p \cos \varphi} = \frac{x_0}{v_0} \longrightarrow \tan \varphi = \frac{x_0}{v_0} \omega_p \quad \varphi = \arctan\left(\frac{x_0}{v_0} \omega_p\right)$$

Ampiezza:

Sfruttiamo $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{A \omega_p}\right)^2 = 1 \longrightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_p^2}}$$

Equazione del moto:

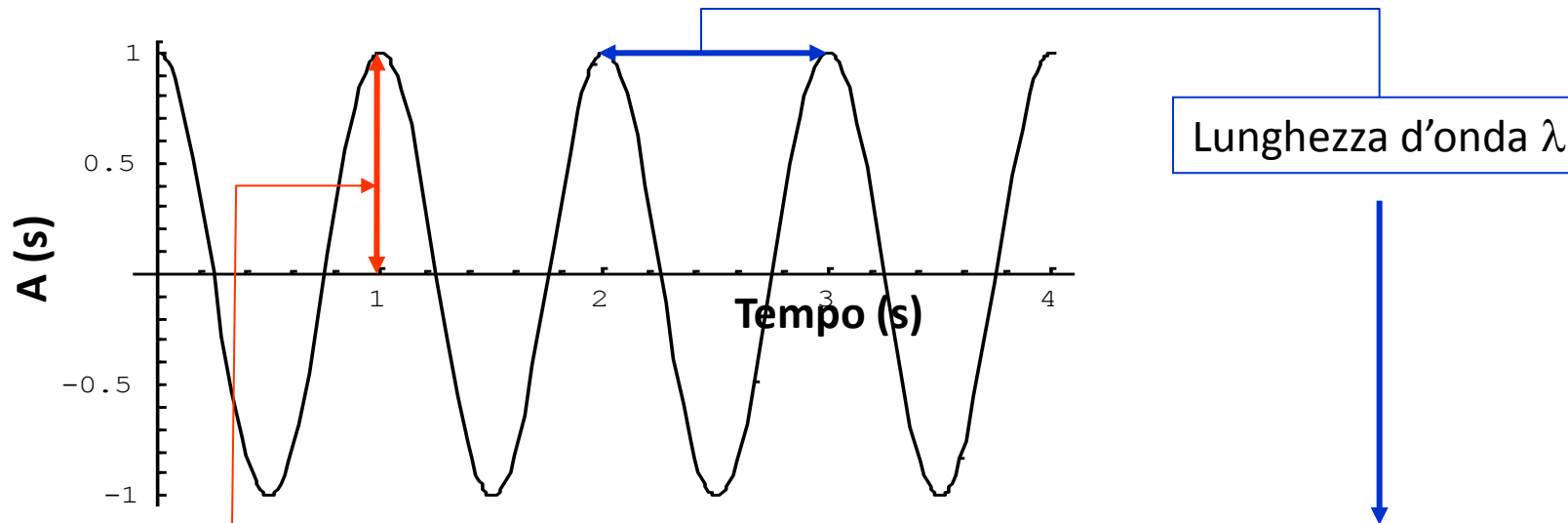
$$x(t) = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_p^2}\right)^{1/2} \sin\left[\omega_p t + \arctan\left(\frac{x_0}{v_0} \omega_p\right)\right]$$

Per $v_0 = 0$ si ritrovano i risultati precedenti $\arctan \alpha \rightarrow \pi/2 \quad \alpha \rightarrow \infty$

Oscillazioni

In questo tipo di fenomenologia quindi abbiamo:

- Una osservabile fisica il cui valore varia periodicamente nel tempo
- Limitiamoci al caso in cui queste oscillazioni sono sinusoidali



Ampiezza dell'oscillazione A

$$\text{Periodo } T = \lambda / \text{vel} \quad [s]$$

$$\text{frequenza } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\text{vel}}{\lambda} \quad [Hz] = [s^{-1}]$$

$$\text{pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad [Hz] = [s^{-1}]$$

$$\text{Periodo } T = \lambda / \text{vel} \quad [s]$$

$$\text{frequenza } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\text{vel}}{\lambda} \quad [Hz] = [s^{-1}]$$

$$\text{pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad [Hz] = [s^{-1}]$$

fase φ

Matematicamente posso descrivere l'osservabile oscillante come una sinusoide

$$A(t) = A_o \cos(\omega t + \varphi)$$

$A_o = \text{Ampiezza}$

$$\text{Pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad [Hz] = [s^{-1}]$$

Fase φ [Radianti]

Moto Armonico – Forza Elastica

Facciamo l'ipotesi di un sistema formato da una unica massa e una forza di richiamo che sia proporzionale allo spostamento della massa rispetto alla posizione di equilibrio.

Questo è proprio il caso della molla, la cui forza F è data da:

$$F = -k_o x \quad \text{oppure} \quad F = -k_o (d - d_0)$$

Applicando le leggi di Newton ed eventualmente traslando l'origine dell'asse $x = (d - d_0)$

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad ma = -k_o x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-k_o}{m} x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{k_o}{m}\right) x = -\left(\frac{k_o}{m}\right) (d - d_0)$$

E' una equazione differenziale, che lega le derivate di una funzione con la funzione stessa.

La soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{k_o}{m}\right)x$$

è una funzione che, a meno di costanti moltiplicative, deve essere tale per cui la sua derivata seconda sia uguale alla funzione stessa.

Conosciamo due funzioni che godono di questa proprietà: sono il seno e il coseno

Abbiamo quindi una combinazione lineare di due funzioni che soddisfano l'equazione differenziale.

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) = -\omega^2 (a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \text{sen}(\omega t)) = -\omega^2 x$$

Attenzione:

Fino ad ora non è stato risolto il problema da un punto di vista fisico: per il momento è stato risolto matematicamente, cioè è stata identificata una *classe* di soluzioni che soddisfano l'equazione differenziale. E' cioè stata trovata una soluzione matematica.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k_o}{m}\right)x \qquad x(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$-a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) = -\left(\frac{k_o}{m}\right)(a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \text{sen}(\omega t))$$

Uguaglio tra loro i termini con il sen e quelli con il coseno

$$\left\{ \begin{array}{l} -a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -\left(\frac{k_o}{m}\right)a \cdot \cos(\omega t) \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \left(\frac{k_o}{m}\right)}$$

La soluzione matematica dice che il sistema oscilla alla frequenza ω_0 (frequenza propria della molla) definita come la radice quadrata del rapporto tra k_o e la massa appesa. Non sono ancora noti i valori delle costanti a e b .

E' necessario quindi completare la descrizione del sistema fornita dall'equazione differenziale, definendo le condizioni al contorno del moto

L'equazione differenziale con la soluzione matematica si scrive come

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{k_o}{m}\right)x \\ x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) + b \cdot \text{sen}(\omega_0 t) \end{array} \right. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La descrizione fisica del sistema richiede delle condizioni al contorno, un possibile esempio puo' essere:

$$\begin{aligned} X(t=0) &= A_o \\ v(t=0) &= 0 \end{aligned}$$



Posizione iniziale $X = A_o$
Velocità iniziale nulla

da cui

$$x(0) = a \cdot \cos(0) + b \cdot \text{sen}(0) = a = A_o$$

$$v(0) = -a \cdot \omega_0 \cdot \text{sen}(\omega_0 t) + b \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) = b \cdot \omega_0 = 0$$

La soluzione quindi diventa :

$$x(t) = A_o \cdot \cos(\omega_0 t) = A_o \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Riassumendo:

Dato una massa (che ipotizziamo puntiforme) appesa ad una molla (che ipotizziamo ideale e di massa trascurabile) che ha l'altro estremo fissato ad un punto (che ipotizziamo inamovibile)

La forza esercitata dalla molla sulla massa è una forza elastica $F = -kx$

Dove k è una costante propria intrinseca della molla

Il moto della massa è un moto 'armonico' descrivibile come una somma di due sinusoidi di uguale pulsazione pari a

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nel caso particolare in cui si faccia partire la massa da ferma, in una distanza A_0 rispetto alla posizione di quiete, l'equazione oraria diventa:

$$x(t) = A_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

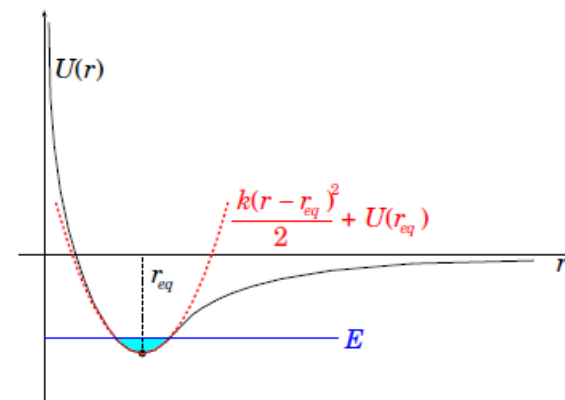
Il moto della molla quindi è perfettamente definito perché le osservabili A_0 , k , m e t sono note e perfettamente definite

Importanza della forza elastica

La forza elastica è associata ad una energia potenziale $U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$, con x_0 punto di equilibrio del sistema.

Ogni moto di un sistema intorno al suo punto di equilibrio, per piccoli spostamenti può essere approssimato dalla forza elastica.

Esempio: oscillazione di atomi all'interno di una molecola, o di un cristallo.



Un esempio più complesso: [le onde sonore](#). Qui le molecole di un mezzo vibrano intorno alla loro posizione di equilibrio, ed inoltre “trasmettono” il loro stato di vibrazione alle molecole vicine. L'argomento verrà trattato in seguito, ma qui ricordiamo che si tratta sempre di fenomeni legati alla forza elastica.

Un ulteriore esempio: [le onde elettromagnetiche](#). Qui non si tratta più di un fenomeno meccanico: le quantità che oscillano sono il campo elettrico e il campo magnetico. Non sono spostamenti nello spazio, ma sono sempre regolate da equazioni formalmente analoghe.

Esperienza Molle 1 giornata

SCOPO: Misura della costante elastica k di 2 molle con il metodo statico e con quello dinamico e ricerca e quantificazione delle non idealità.

Il sensore permette di acquisire con una accuratezza di 1 mm e frequenza da 10 a 100 Hz (a voi la scelta) la posizione di una massa posta sulla verticale ($h > 15$ cm) del sensore

Caratteristiche tecniche del sensore

Gamma del sensore: Da 0,15 a 8 metri (accuratezza $\pm 0,001$ m)  0,5 mm

Distanza minima: 15 cm; letture false se distanza minore


Impostazioni del commutatore di gamma:

Impostazione del

carrello :

Per il carrello o attività a gamma breve

Impostazione della

persona :

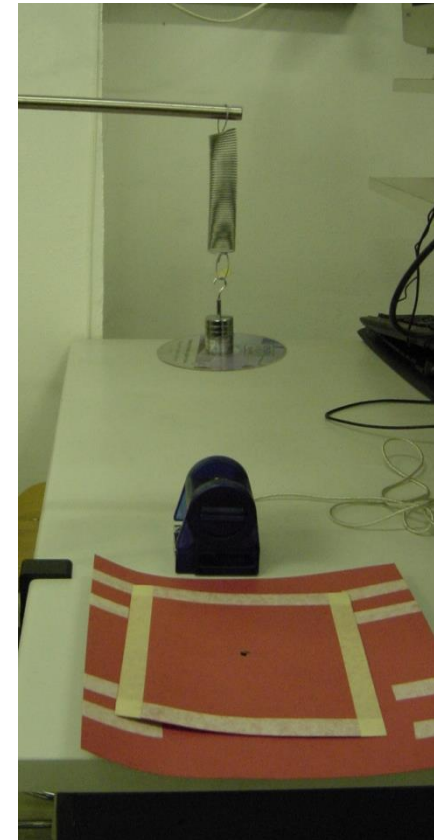
Per persone o attività a gamma lunga

LED indicatore del bersaglio disattivato:

Nessun bersaglio rilevato. Riallineare il bersaglio e riprovare o utilizzare una tavola piatta e riflettente (648-07373) come bersaglio per migliorare il rilevamento.

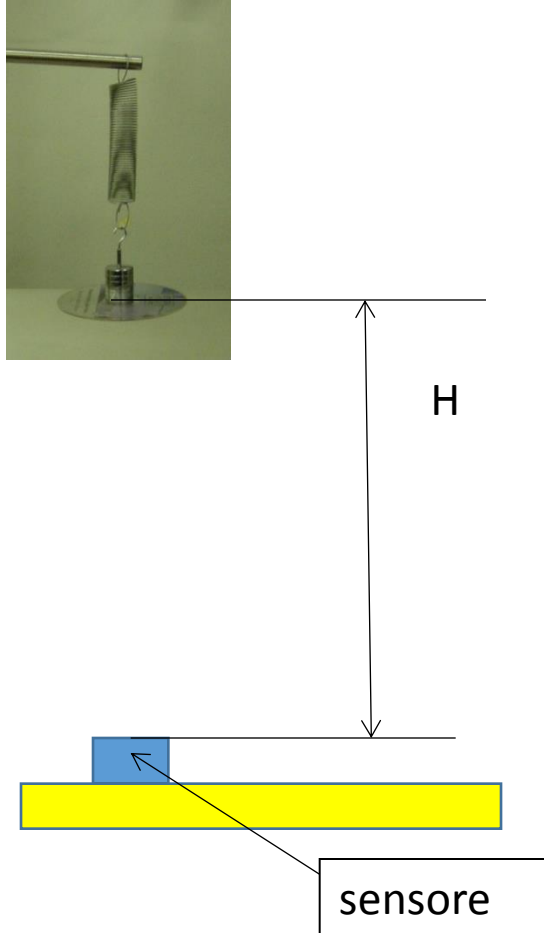
Riflessioni superficiali:

Inclinare il sensore fino a 5–10 gradi per evitare riflessioni dalla superficie di un tavolo o dall'alloggiamento del sensore.



Metodo Statico

Misuro l'allungamento della molla al variare della massa appesa



Peso la massa e ottengo $F = mg$
Misuro l'allungamento e ottengo 'x'
Estraggo K dalla relazione $K = - F/x$

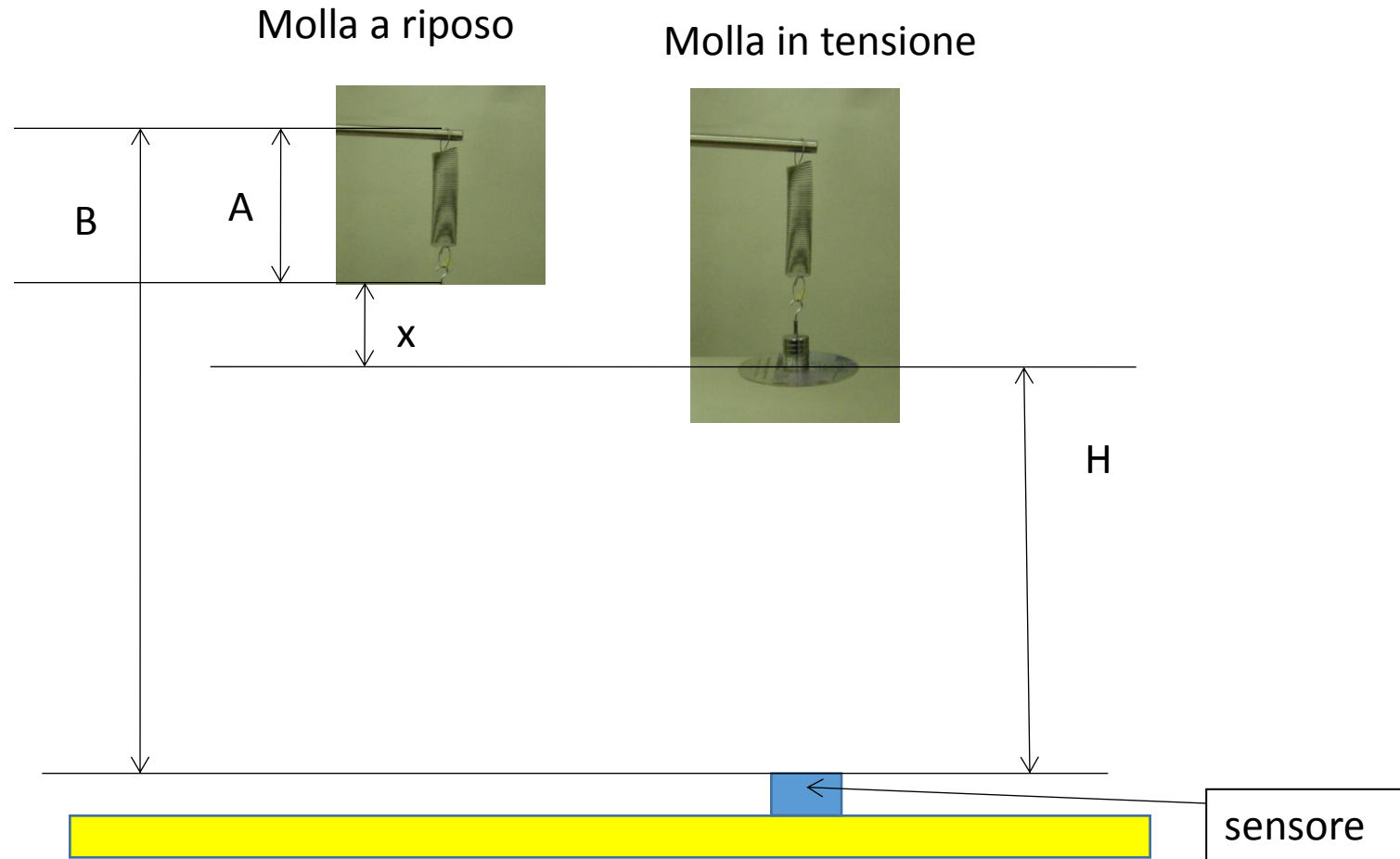
Il sensore che abbiamo a disposizione misura la distanza tra il sensore stesso ed il primo ostacolo incontrato

Attenzione - a posizionarlo sulla verticale della molla
- ad orientarlo correttamente
- a non metterlo troppo vicino ($H > 15$ cm) o troppo lontano.

Notate che il valore misurato non è l'osservabile 'x' presente nella legge elastica

$$F = -k \cdot x$$

$$X = B - A - H$$



Non è corretto usare i valori H misurati dal sensore all'interno della formula $F = -kx$ infatti l'osservabile data dal sensore non rappresenta l'allungamento della molla ma la sua distanza dal sensore. Bisognerebbe trasformare l'altezza dal sensore nel corrispondente allungamento della molla. Detta B l'altezza della molla a riposo e A la lunghezza della molla allora si può scrivere:

$$X = B - A - H$$

Nel caso in cui le lunghezze siano tutte misurate con una incertezza pari a 0.5 mm allora

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_A^2 + \sigma_H^2} = 0.5\sqrt{3} = 0.85 \text{ mm}$$

-questa relazione introduce troppi errori, senza contare la possibile presenza di errori sistematici

E' pero' possibile usare le differenze tra due misure

$$F_1 = m_1 g = -kx_1 = -k(B - A - H_1)$$

$$F_2 = m_2 g = -kx_2 = -k(B - A - H_2)$$

$$F_1 - F_2 = (m_1 - m_2) g = -k(H_1 - H_2)$$

Posso procedere in due modi differenti

Caso 1 – Si supponga di fare 4 misure (in pratica sono un po' poche)

Massa	Misura	Allungamento
M_0	H0	B-A-H0
M_1	H1	B-A-H1
M_2	H2	B-A-H2
M_3	H3	B-A-H3

ΔM	ΔH	ΔH	
$M_1 - M_0$	B-A-H1-B+A+H0	H1 -H0	k1
$M_2 - M_1$	B-A-H2-B+A+H1	H2 -H1	k2
$M_3 - M_2$	B-A-H3-B+A+H2	H3 -H2	k3
$M_4 - M_3$	B-A-H4-B+A+H3	H4 -H3	k4

Se $M_1 - M_0 = M_2 - M_1 = M_3 - M_2 = M_4 - M_3$ cioè sono identici tra loro (statisticamente compatibili) allora sarà che anche $H_0 - H_1 = H_1 - H_2 = H_2 - H_3 = H_3 - H_4$ cioè sono tra loro a loro volta identici

Di conseguenza posso ottenere più valori di k con cui estrarre un valor medio e una deviazione standard

$$k = \frac{\Delta M}{\Delta H} g$$

Problema:

- 1 - Una misura 'errata' influenza due valori di k (c'è una correlazione)
- 2 - Per evitare le correlazioni ho bisogno di 4 misure per avere 2 stime di k

Caso 2

Si usano le differenze relative ed una regressione lineare

Massa	Misura	Allungamento
M ₀	H ₀	B-A-H ₀
M ₁	H ₁	B-A-H ₁
M ₂	H ₂	B-A-H ₂
M ₃	H ₃	B-A-H ₃

Massa		Osservabile	
M ₀ - M ₀	B-A-H ₀ -B+A+H ₀	H ₀ - H ₀	x ₀₀
M ₁ - M ₀	B-A-H ₁ -B+A+H ₀	H ₁ - H ₀	x ₀₁
M ₂ - M ₀	B-A-H ₂ -B+A+H ₀	H ₂ - H ₀	x ₀₂
M ₃ - M ₀	B-A-H ₃ -B+A+H ₀	H ₃ - H ₀	x ₀₃

- Si sottrae a tutte le misure una misura di 'zero' che deve essere la più accurata possibile
- Non bisogna misurare A e B
- In altre parole si sta traslando la retta $Mg = k(B-A-H)$ in maniera che passi per l'origine

ΔM	ΔH
0	0
M ₁ - M ₀	H ₁ - H ₀
M ₂ - M ₀	H ₂ - H ₀
M ₃ - M ₀	H ₃ - H ₀

$$F_1 - F_0 = g\Delta M = k\Delta H$$

$$y = \frac{k}{g}x \quad y = \Delta M \quad x = \Delta H$$

Nota: il risultato della regressione lineare DEVE dare un termine noto compatibile con zero. Altrimenti il modello usato per descrivere il sistema non è corretto !

NOTA IMPORTANTE

- Fino ad ora è stato considerato un sistema ideale
- Nella realtà la molla ha una massa ed una lunghezza 'minima'

La lunghezza finita della molla può avere una influenza sulla misura ?

- Certamente si !
- Bisogna accertarsi che tutte le spire della molla siano separate altrimenti abbiamo teso solo una parte della molla e misureremo una K differente

La massa non nulla della molla può avere una influenza sulla misura ?

- Certamente si !
- La molla si allunga sul suo stesso peso
- La tecnica delle differenze relative elimina tuttavia quest'effetto

$$kx = gM_{vera} = g(M + M_{molla}) \qquad M_{vera} = M + M_{molla}$$
$$k\Delta x = g((M_{vera-1}) - (M_{vera-0})) = g((M_1 + M_{molla}) - (M_0 + M_{molla})) = g(M_1 + M_0) = g\Delta M$$

Metodo Dinamico

Misuro la pulsazione della molla al variare della massa appesa

Massa	Pulsazione
M ₀	w ₀
M ₁	w ₁
M ₂	w ₂

Anche in questo caso la massa della molla allontana dalla idealità il sistema

Anche in questo caso la massa che fa oscillare la molla è superiore a quella appesa perché bisogna considerare anche la massa della molla.

La massa non entra linearmente nella formula della costante elastica e quindi non è possibile eliminare banalmente la massa della molla con le differenze relative

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_{\text{intrinseca}}}} \Rightarrow \omega_1 - \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_{\text{intrinseca}}}} - \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_{\text{intrinseca}}}}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m + m_{\text{intrinseca}}} \Rightarrow \omega_1^2 - \omega_0^2 = \frac{k}{m_1 + m_{\text{intrinseca}}} - \frac{k}{m_0 + m_{\text{intrinseca}}}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{m + m_{\text{intrinseca}}}{k} \Rightarrow \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m_1 + m_{\text{intrinseca}}}{k} - \frac{m_0 + m_{\text{intrinseca}}}{k} = \frac{m_1 - m_0}{k}$$

E' più semplice fare una regressione lineare invece che estrarre il valore di k dalle singole misure. Le osservabili misurate sono m_{appesa} e ω

$$m_{\text{vera}} = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow m_{\text{vera}} = m_{\text{appesa}} + m_{\text{intrinseca}}$$

$$m_{\text{appesa}} = \frac{k}{\omega^2} - m_{\text{intrinseca}} \Rightarrow y = m_{\text{appesa}} \quad x = \frac{1}{\omega^2}$$

Dal coefficiente angolare si può estrarre la costante k

Dal termine noto si può estrarre la massa effettiva della molla

L'intercetta assume il significato della massa effettiva della molla (quella cioè che contribuisce all'oscillazione) dovuta alla massa non nulla della molla.

Il valore di $m_{\text{intrinseca}}$ NON coincide con la massa della molla

E' una misura della non idealità della molla

Semplice stima teorica i $m_{\text{intrinseca}}$

Data una molla di massa totale M e lunghezza totale L omogenea.
Dividiamola in segmentini di massa $dm = M/L dx$ e lunghezza dx

L'energia cinetica di ciascun segmentino sarà: $dE_k = \frac{1}{2} v^2(x) dm$

L'energia cinetica totale sarà: $E_k = \int_0^L \frac{1}{2} v^2(x) dm = \int_0^L \frac{1}{2} v^2(x) \frac{M}{L} dx$

La velocità dei diversi elementi di massa dm ovviamente dipenderà dalla loro posizione. Assumiamo che la dipendenza della velocità della molla dalla coordinata sia lineare:

$$v(x) = \frac{x}{L} V_L$$

$$E_k = \int_0^L \frac{1}{2} v^2(x) \frac{M}{L} dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} V_L^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{L^2} V_L^2 \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{1}{L^2} V_L^2 \frac{M}{L} \frac{1}{3} L^3$$

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{M}{3} V_L^2$$

Quindi, in questo modello, la molla contribuisce con il 30% della sua massa

NOTA:

Non mescolate o danneggiate le molle !

Le molle che vi verranno date dovranno essere usate anche la settimana successiva.

Se le mescolate, danneggiate, , dovrete rifare tutto e soprattutto dovrete farlo rifare ai gruppi che vengono dopo di voi

Esperienza molle II (Molla Smorzata)

Ricordatevi tutto quello detto per l'esperienza Molle 1
Ovviamente tutto quello detto prima è ancora valido

... e l'attrito ...

Chiamiamo l_0 la lunghezza della molla a riposo (cioè non sottoposta ad alcuna forza esterna), l la sua lunghezza attuale, cosicché $\Delta l = l - l_0$.

Scegliamo un asse x orientato verso il basso, cosicché maggiori allungamenti Δl corrispondono a maggiori valori di x .
La forza totale agente sulla massa m appesa è:

$$F = F_{el} + F_g + F_{attr} = -k(l - l_0) + mg - (C_1 + C_2|v|)v$$

Punto di equilibrio

Il punto di equilibrio è quello in cui il sistema fermo non subisce forze. Questa condizione, imponendo $F = 0$ con $v = 0$, corrisponde ad una lunghezza l_{eq} tale che:

$$k(l_{eq} - l_0) = mg$$

Pertanto, d'ora in poi esprimiamo lo stato del sistema con lo spostamento dal suo punto di equilibrio: $x \stackrel{\text{def}}{=} l - l_{eq}$

Dinamica

Ovviamente la velocità è $v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dl}{dt} = \frac{dx}{dt}$. L'equazione del moto diventa dunque:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx - \left(C_1 + C_2 \left| \frac{dx}{dt} \right| \right) \frac{dx}{dt}$$

(ogni effetto gravitazionale è riassorbito nella definizione del punto di equilibrio)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx - \left(C_1 + C_2 \left| \frac{dx}{dt} \right| \right) \frac{dx}{dt}$$

(ogni effetto gravitazionale è riassorbito nella definizione del punto di equilibrio)

L'equazione si può risolvere analiticamente se $C_2 = 0$

E' possibile trovare una soluzione approssimata (sotto alcune ipotesi) se $C_1 = 0$

A priori non si può dire se $C_1 = 0$, se $C_2 = 0$ o se siano entrambi diversi da zero, sarà la situazione sperimentale e/o l'analisi dei dati acquisiti a dirlo

1 caso sperimentale

Sia $C_2 = 0$

$$F = -k_o x - C_1 \cdot v \qquad C_1 = \beta$$

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_o x - \beta \cdot \frac{dx}{dt}$$

Moto Armonico Smorzato Classico ($C_2=0$)

Facciamo l'ipotesi di un sistema formato da una unica massa e una forza di richiamo che sia proporzionale allo spostamento della massa rispetto alla posizione di equilibrio che si muova in un mezzo viscoso con $F_{\text{attrito}} = C_1 v = \beta v$.

In questo caso, oltre alla forza elastica devo considerare una forza di attrito viscoso

$$F = -k_o x - \beta \cdot v = -k_o x - \beta \cdot \frac{dx}{dt}$$

Applicando le leggi di Newton

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad ma = -k_o x - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{k_o}{m}\right)x - \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_o}{m}$$

$$2\gamma = \frac{\beta}{m}$$

E' una equazione differenziale omogenea, cioè senza termine noto

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \frac{dx}{dt} \qquad \omega_0^2 = \frac{k_o}{m} \qquad 2\gamma = \frac{\beta}{m}$$

Per risolvere l'equazione bisogna cercare una soluzione oscillante con frequenza ω

$$x(t) = Ae^{i\omega t}$$

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega_0^2 Ae^{i\omega t} - i2\gamma\omega Ae^{i\omega t}$$

dividendo per $Ae^{i\omega t}$

$$-\omega^2 = -\omega_0^2 - 2\gamma\omega i \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - 2\gamma\omega i - \omega_0^2 = 0$$

Equazione di II grado

$$\omega = \gamma \cdot i \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2}$$

La pulsazione ω soluzione dell'equazione differenziale è:

- Un numero immaginario puro $\omega = i\gamma$ per $\omega_0^2 = \gamma^2$
- Un numero immaginario puro per $\omega_0^2 < \gamma^2$ (attrito molto forte)
- Un numero immaginario con parte reale e immaginaria per $\omega_0^2 > \gamma^2$

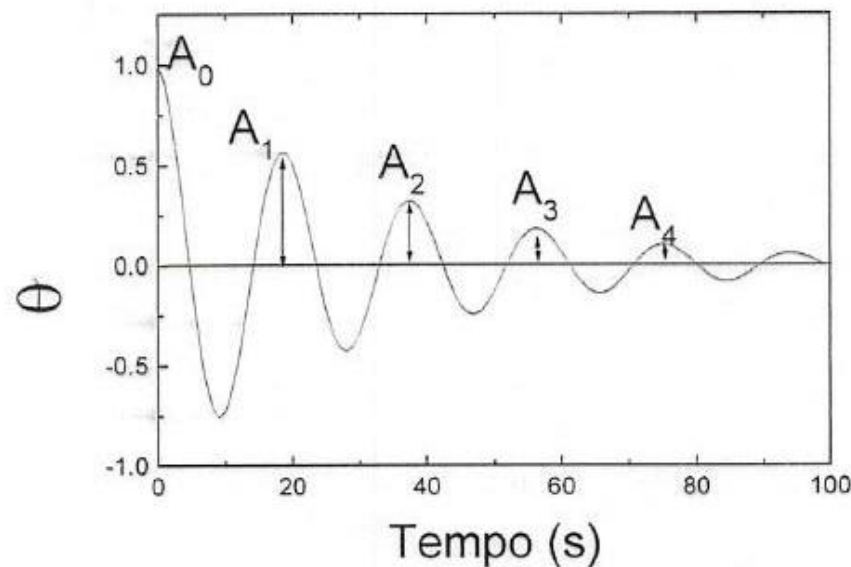
Moto sottosmorzato (l'attrito non è dominante)

$$\text{sia } \omega_0^2 > \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ae^{-\gamma t} e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right)$$

L'equazione oraria presenta quindi:

- Un termine esponenziale decrescente con costante di tempo $1/\gamma$
- Un termine oscillante di ampiezza costante A nel tempo
- Un termine oscillante di frequenza costante ma differente da ω_0



Il moto è oscillante di frequenza costante (differente da ω_0) con ampiezza che decresce esponenzialmente con una costante di tempo $1/\gamma$

Dopo circa 5 costanti di tempo il sistema si è sostanzialmente fermato, l'ampiezza cioè è e^{-5} volte più piccola (circa 150 volte più piccola)

Quindi:

- 1) L'ampiezza delle oscillazioni è smorzata esponenzialmente con costante di tempo pari a $1/\gamma$. Questo a dispetto del fatto che la soluzione generale che abbiamo introdotto inizialmente avesse un'ampiezza costante! Il processo di risoluzione dell'equazione contiene quanto necessario per descrivere adeguatamente il moto, e infatti introduce una componente immaginaria della frequenza che modula l'ampiezza delle oscillazioni.
- 2) L'oscillazione avviene ad una frequenza diversa dal caso in cui l'attrito non sia presente. Più precisamente, la frequenza è diminuita di una quantità determinata direttamente dall'attrito $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Questo fenomeno si può interpretare come il fatto che l'attrito rallenta il moto del sistema.
- 3) Le frequenze del moto che risolvono l'equazione algebrica sono due ma la frequenza di oscillazione del sistema è una sola a meno del segno.
- 4) In un sistema fisico reale il moto descritto dalla legge oraria ha senso solo su un intervallo (inferiormente) limitato di tempi, cioè per $t > 0$.
- 5) Il coefficiente di attrito γ è inversamente proporzionale alla massa, a masse maggiori corrisponderanno coefficienti di attrito γ minori. L'osservabile $\beta = 2m\gamma$ è invece una costante del sistema, che dipende solo dal mezzo viscoso.

Moto sovrasmorzato (attrito dominante)

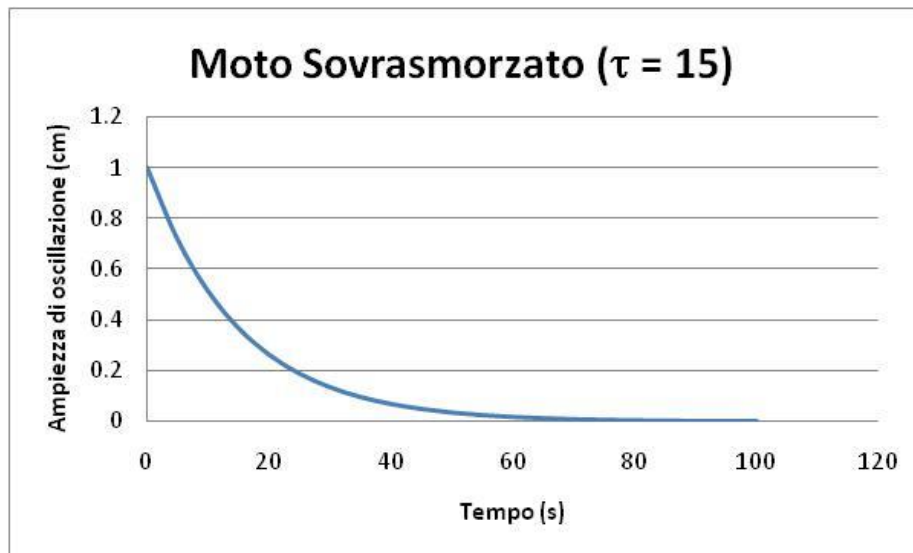
$$\text{sia } \omega_0^2 < \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ae^{-\gamma t} e^{\pm\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}$$

$$x(t) = Ae^{\left(-\gamma \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \gamma^2}\right)t} = Ae^{-t/\tau}$$

L'equazione oraria presenta quindi:

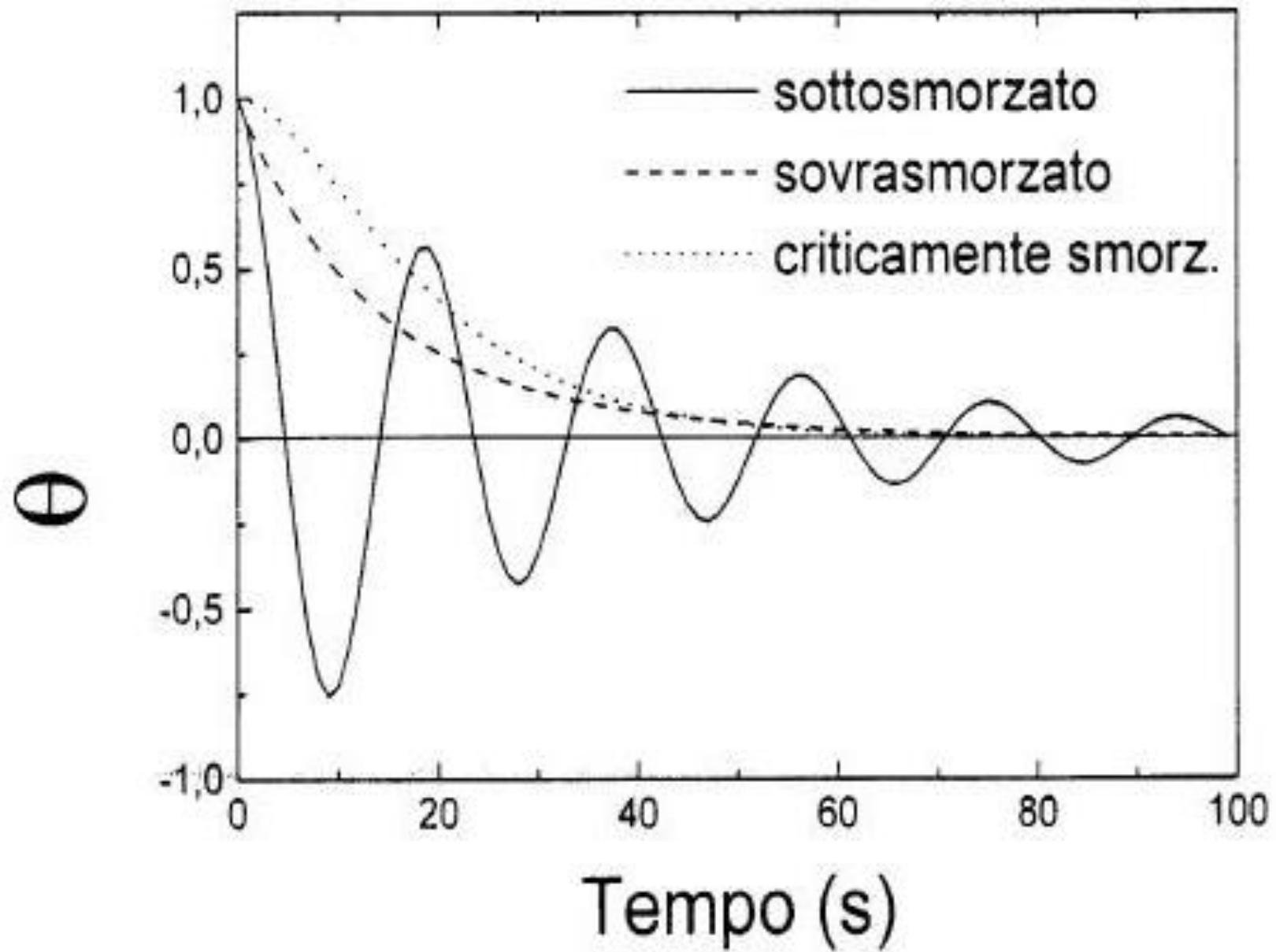
- Un termine esponenziale decrescente con costante di tempo pari a

$$\tau = \frac{1}{-\gamma \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \gamma^2}}$$



Il moto dell'oscillatore è quindi un moto esponenziale decrescente tempo τ .

Dopo circa un tempo pari a 5 costanti di tempo il sistema è sostanzialmente fermato, l'ampiezza cioè è e^{-5} volte più piccola (circa 150 volte)



Riassumendo:

Data una massa (che ipotizziamo puntiforme) appesa ad una molla (che ipotizziamo ideale e di massa trascurabile) con un estremo fissato ad un punto (che ipotizziamo inamovibile) e una forza di attrito (che ipotizziamo dipenda linearmente dalla velocità)

La forza esercitata sulla massa è:

$$F = -kx - 2\gamma \frac{dx}{dt}$$

Dove k è una costante propria della molla e γ è legato al coefficiente di attrito

In situazione di basso attrito (moto sottosmorzato) il moto della massa è armonico con frequenza $(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ e di ampiezza decrescente. Nel caso particolare in cui si faccia partire la massa da ferma con uno spostamento A_0 rispetto alla posizione di quiete, l'equazione oraria diventa:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}$$

2 caso sperimentale

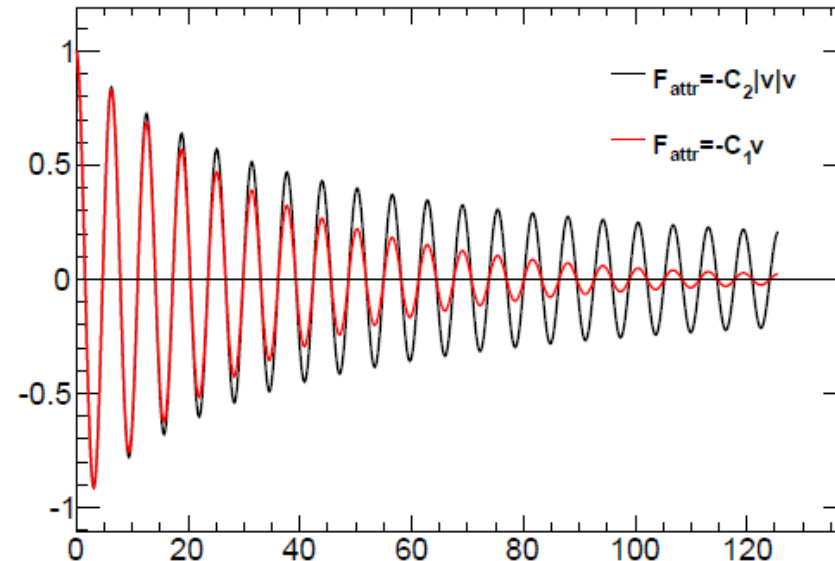
Sia $C_1 = 0$

Ipotesi necessarie:

- 1) La soluzione ha una forma oscillante $x = A(t) \cos(\omega t + \phi)$
- 2) $A(t)$ varia nel tempo molto più lentamente di $\cos(\omega t + \phi)$
- 3) $C_2 \ll m/A$ (l'effetto dell'attrito è molto più piccolo del moto oscillatorio)

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t} \quad \left(\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3\pi} C_2 \frac{\omega_0^3}{k} \right)$$

Andamento dell'equazione oraria
nei due casi qui discussi



Legge oraria del sistema massa–molla ($F_{\text{attr}} = -C_2|v|v$)

Partiamo dall'equazione del moto:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx - C_2 \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt}$$

Non esiste una soluzione analitica! Dobbiamo arrangiarci con delle semplificazioni “ragionevoli”.

Sappiamo dall'esperienza che il moto è oscillatorio smorzato $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$, con $A(t)$ da determinare. assumiamo che $A(t)$ varii molto più lentamente di $\cos(\omega_0 t + \phi)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} \simeq -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} \simeq -A(t)\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Usiamo l'energia meccanica: $E = U_{el}(x) + \mathcal{E} = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow$ all'estremo dell'oscillazione $E = \frac{k}{2}A^2$

La potenza dissipata per attrito è

$$W_{\text{attr}} = F_{\text{attr}}v = -C_2|v|^3$$

La potenza dissipata mediamente in un periodo è:

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{attr}} \rangle &= -C_2 \langle |v|^3 \rangle = -C_2 \frac{1}{T} \int_0^T dt |v(t)|^3 \\ &\simeq -C_2 \frac{(\omega_0 A)^3}{T} \int_0^T dt |\sin(\omega_0 t)|^3 \\ &= -\frac{4}{3\pi} C_2 (\omega_0 A)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt |\sin(\omega_0 t)|^3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi |\sin \xi|^3 \quad (\xi \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\xi \sin^3 \xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d(\cos \xi) (1 - \cos^2 \xi) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\eta (1 - \eta^2) \quad (\eta \stackrel{\text{def}}{=} \cos \xi) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

Legge oraria del sistema massa–molla ($F_{attr} = -C_2|v|v$)

Dobbiamo risolvere $\frac{dE}{dt} \simeq \langle W_{attr} \rangle$:

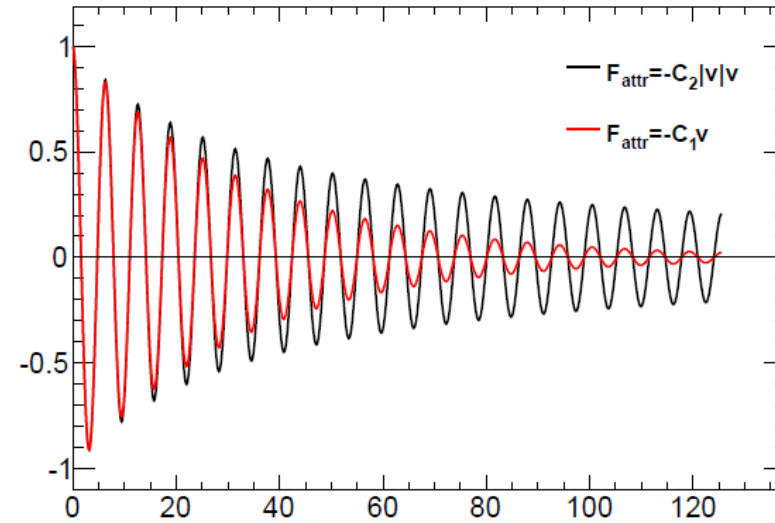
$$kA \frac{dA}{dt} = -\frac{4}{3\pi} C_2 (\omega_0 A)^3$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{4}{3\pi} \frac{C_2 \omega_0^3}{k} A^2$$

$$\frac{dA}{A^2} = -\frac{4}{3\pi} \frac{C_2 \omega_0^3}{k} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A(t)} - \frac{1}{A_0} = \left[\frac{4}{3\pi} C_2 \frac{\omega_0^3}{k} \right] t = \alpha t$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t} \quad \left(\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3\pi} C_2 \frac{\omega_0^3}{k} \right)$$



Limiti di validità abbiamo supposto che $\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega_0 A \Rightarrow \frac{4}{3\pi} \frac{C_2 \omega_0^3}{k} A^2 \ll \omega_0 A \Rightarrow$ soddisfatta se $C_2 \ll \frac{k}{A \omega_0^2}$

Ora, $|F_{el}| = k|x| \approx kA$ e $|F_{attr}| = C_2|v|^2 \approx C_2 A^2 \omega_0^2 \ll kA$

\Rightarrow su un solo ciclo $|F_{attr}| \ll |F_{el}|$, l'oscillazione è dominata dalla forza elastica $\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



\Rightarrow la condizione di validità di tutte le approssimazioni è $C_2 \ll \frac{m}{A}$

Che cosa vuol dire in pratica \ll ? Va bene $C_2 \approx 0.1 \frac{m}{A}$? Bisogna andare a $C_2 \approx 0.01 \frac{m}{A}$?

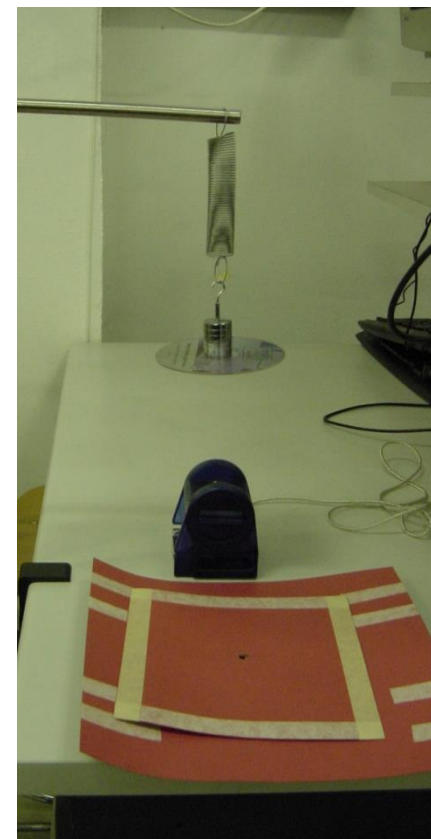
Esperienza Molle II

SCOPO: Scegliete 1 Molla, verificate che tipo di moto avete e fate la misura del coefficiente di attrito (C_1 e/o C_2).

Il sensore permette di acquisire con una accuratezza di 1 mm e una frequenza di campionamento da 10 a 100 Hz (a voi la scelta) la posizione di una massa posta sulla verticale ($h > 15$ cm) del sensore

Caratteristiche tecniche del sensore	
Gamma del sensore:	Da 0,15 a 8 metri (accuratezza $\pm 0,001$ m)
Distanza minima:	15 cm; letture false se distanza minore
Impostazioni del commutatore di gamma:	
Impostazione del carrello  :	Per il carrello o attività a gamma breve
Impostazione della persona  :	Per persone o attività a gamma lunga
LED indicatore del bersaglio disattivato:	Nessun bersaglio rilevato. Riallineare il bers e riprovare o utilizzare una tavola piatta e riflettente (648-07373) come bersaglio per migliorare il rilevamento.
Riflessioni superficiali:	Inclinare il sensore fino a 5–10 gradi per evi riflessioni dalla superficie di un tavolo o dall'alloggiamento del sensore.

0,5 mm



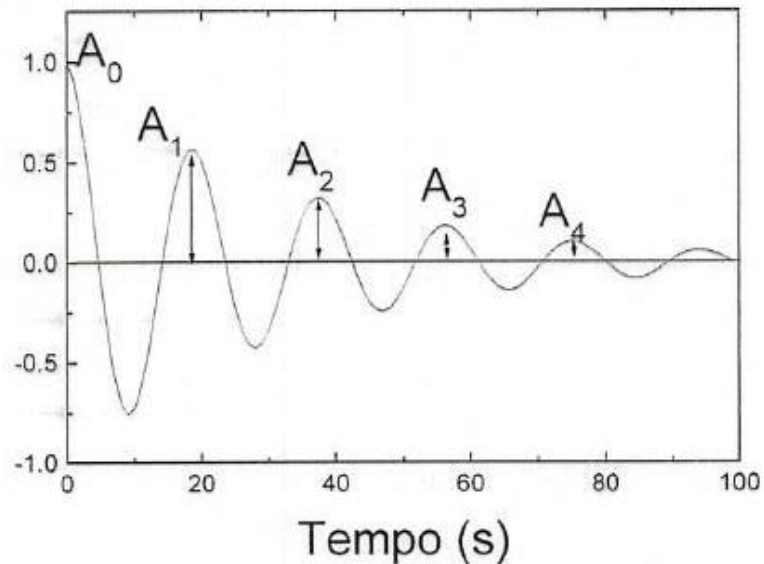
Misura del coefficiente di attrito

Misuro l'ampiezza dei massimi di oscillazione in funzione del tempo (espresso in multipli di T). Infatti per entrambi i casi ($C_1 = 0$ oppure $C_2 = 0$):

$$C_2 = 0 \quad x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega'_0 t + \phi) \quad \left(\omega'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$$

$$C_1 = 0 \quad x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi), \quad A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t} \quad \left(\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3\pi} C_2 \frac{\omega_0^3}{k} \right)$$

Poiché l'equazione oraria $x(t)$ è valida per qualsiasi valore di t selezionando i tempi per cui il coseno è massimo (o minimo) si avrà $\cos(\omega t) = 1$ oppure -1



Ampiezza	Tempo
A_0	0
A_1	T
A_2	2T
A_n	nT

Misura del coefficiente di attrito

E' stato selezionato il massimo/minimo dell'oscillazione

$$C_2 = 0 \quad x(t) = Ae^{-\gamma t}$$

$$C_1 = 0 \quad x(t) = A(t)$$

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t} \quad \left(\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3\pi} C_2 \frac{\omega_0^3}{k} \right)$$

Bisogna verificare se l'andamento sperimentale delle ampiezze di oscillazione segue l'andamento predetto per $C_1=0$ o per $C_2 = 0$

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t)$$

$$x(T) = A_0 e^{-\gamma T}$$

$$x(nT) = A_0 e^{-\gamma nT}$$

$$\frac{x(T)}{x(nT)} = \frac{A_0 e^{-\gamma T}}{A_0 e^{-\gamma nT}} = \frac{e^{-\gamma T}}{e^{-\gamma nT}} = e^{(n-1)\gamma T}$$

$$\log\left(\frac{x(T)}{x(nT)}\right) = \log\left(e^{(n-1)\gamma T}\right) = (n-1)\gamma T$$

$$y = \log\left(\frac{x(T)}{x(nT)}\right) \quad x = (n-1)$$

$$y = \gamma T x$$

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0^2 t + \varphi)$$

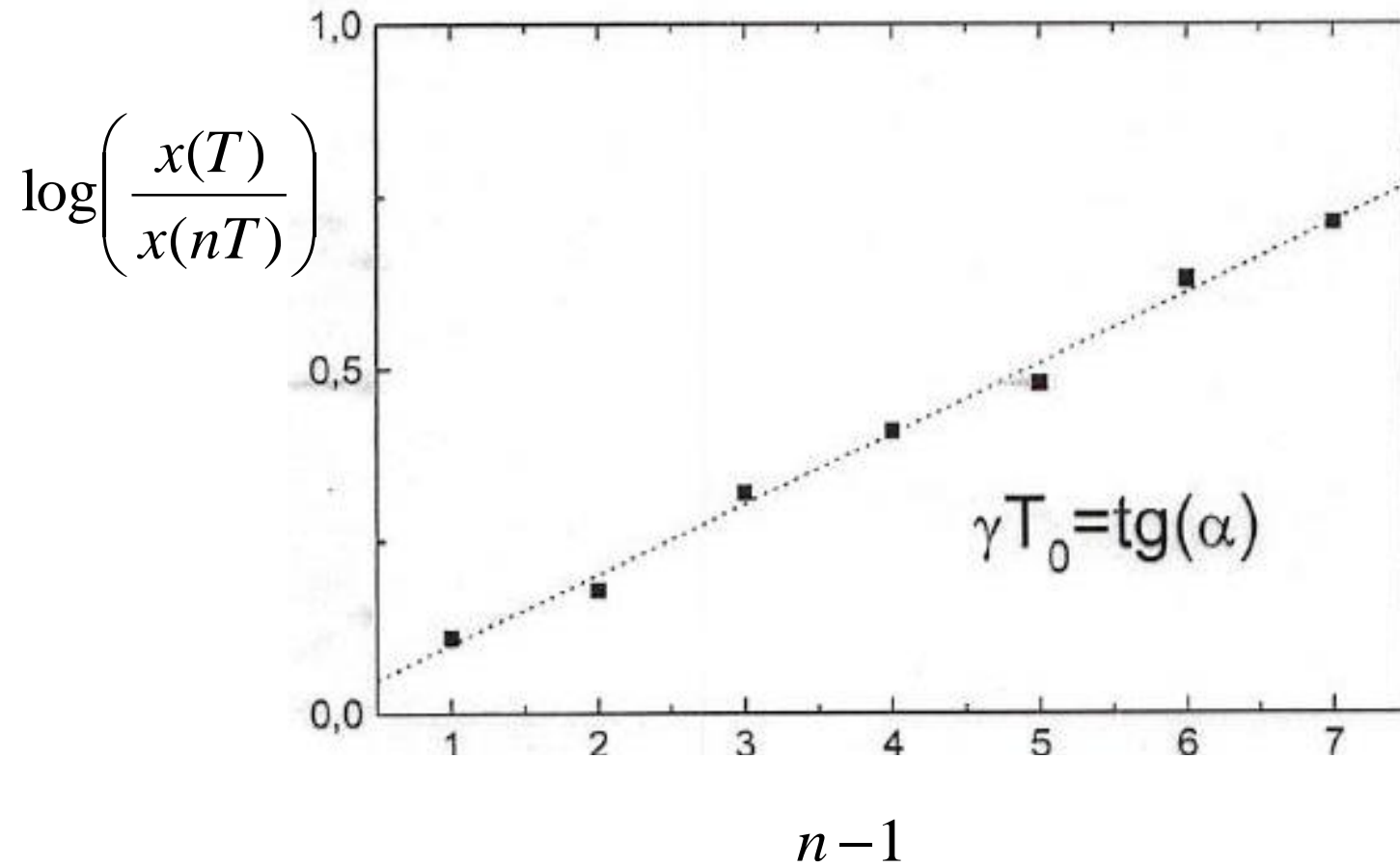
$$x(T) = A(T) = \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha T} \Rightarrow \frac{1}{x(T)} = \frac{1}{A_0} + \alpha T$$

$$y = \frac{1}{x(T)} \quad x = T$$

$$y = \alpha x + \frac{1}{A_0}$$

Verifico, con un test del χ^2 se i dati sperimentali seguono l'andamento predetto da $C_1=0$, $C_2=0$ o da nessuno dei due casi

ESEMPIO



Notate che la misura delle ampiezze (che ha l'errore maggiore) è stata posta sull'asse delle ordinate

Moto Armonico Forzato e Smorzato (Ipotesi $\Rightarrow C_2=0$)

Facciamo l'ipotesi di un sistema formato da una massa (che ipotizziamo puntiforme) appesa ad una molla (che ipotizziamo ideale e di massa trascurabile) che ha l'altro estremo fissato ad un punto (che ipotizziamo inamovibile), una forza di attrito (che ipotizziamo viscoso con $C_2=0$) come l'aria e sottoposta ad una forzante 'armonica'.

Supponiamo di essere in regime sottosmorzato

In questo caso, oltre alla forza elastica devo considerare una forzante di frequenza pari a ω_f

$$F = ma = -k_o x(t) - \beta \cdot \frac{dx(t)}{dt} + F_o e^{i\omega_f t}$$
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) - 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \frac{F_o}{m} e^{i\omega_f t}$$

Ci troviamo davanti ad una equazione differenziale in $x(t)$ non omogenea, cioè con un termine noto.

La soluzione di una equazione differenziale non omogenea è data dalla combinazione lineare della soluzione dell'equazione differenziale omogenea con una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea.

Soluzione dell'omogenea associata:

è quella del moto armonico smorzato che abbiamo visto precedentemente

$$x_1(t) = A_o e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t)$$

Soluzione particolare:

Si cerca analogamente al caso precedente:

$$x_2(t) = A_o e^{-i\omega_f t}$$

Cerco cioè se un moto oscillatorio con frequenza uguale a quella della forzante può essere una soluzione del sistema.

Morale: $soluzione = a x_1(t) + b x_2(t)$

Vediamo la forma che deve avere la soluzione particolare $x_2(t)$, la sostituisco nell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{F_o}{m} e^{i\omega_f t}$$

$$x_2(t) = A_o e^{i\omega_f t}$$

$$-A_o \omega_f^2 e^{i\omega_f t} = -\omega_0^2 A_o e^{i\omega_f t} - i2\gamma A_o \omega_f e^{-i\omega_f t} + \frac{F_o}{m} e^{i\omega_f t}$$

$$e^{-i\omega_f t} \left(A_o \omega_f^2 - \omega_0^2 A_o - i2\gamma A_o \omega_f + \frac{F_o}{m} \right) = 0$$

$$A_o (\omega_f^2 - 2\gamma\omega_f - \omega_0^2 i) + \frac{F_o}{m} = 0$$

$$A_o = \frac{F_o / m}{-\omega_f^2 + i2\gamma\omega_f + \omega_0^2} = \frac{F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f}$$

L'oscillazione di frequenza ω_f è soluzione se e solo se la sua ampiezza ha questo andamento dipendente ω_f ma non dal tempo

La soluzione particolare assume quindi la forma:

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega_f^2) + 2i\gamma\omega_f} e^{i\omega_f t}$$

E' una funzione oscillante con pulsazione ω ampiezza $A_o(\omega)$ e fase φ

Per un numero complesso

$$|a + ib| = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

quindi

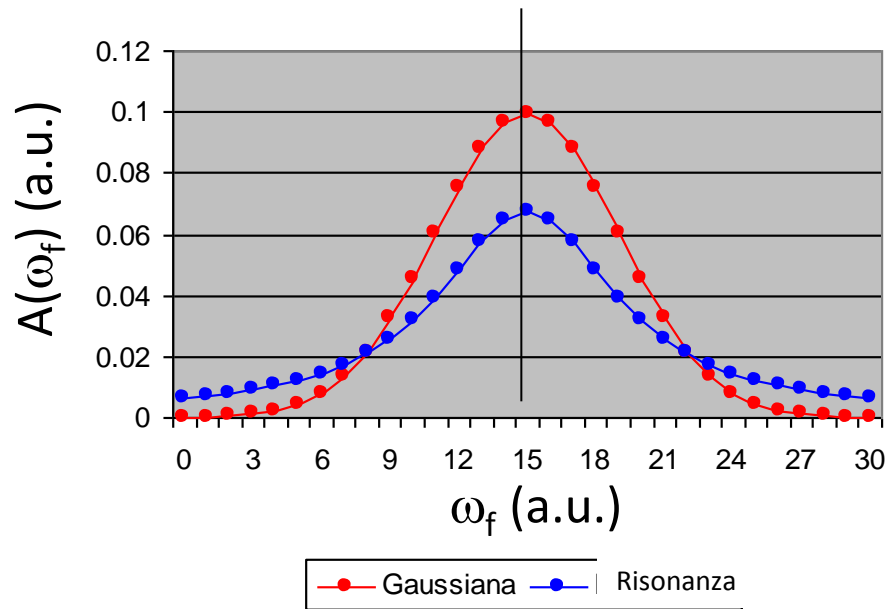
$$|x_2(t)| = \left| \frac{F_o / m}{\omega_o^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f} \right| = \frac{F_o}{m} \left| \frac{\omega_o^2 - \omega_f^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \right| = \frac{F_o}{m} \sqrt{\frac{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}{((\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2)^2}}$$

$$|x_2(t)| = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a} = -\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_o^2 - \omega_f^2}$$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

$A(\omega_f)$



Centroide $\Rightarrow \omega_0 = \omega_f$

$$FWHM \propto \gamma$$

Più aumenta l'attrito più la larghezza a metà altezza aumenta, più la curva diventa piatta.

Il quadrato dell'ampiezza di oscillazione $|A(\omega)|^2$ (proporzionale all'energia) produce una curva chiamata lorenziana -

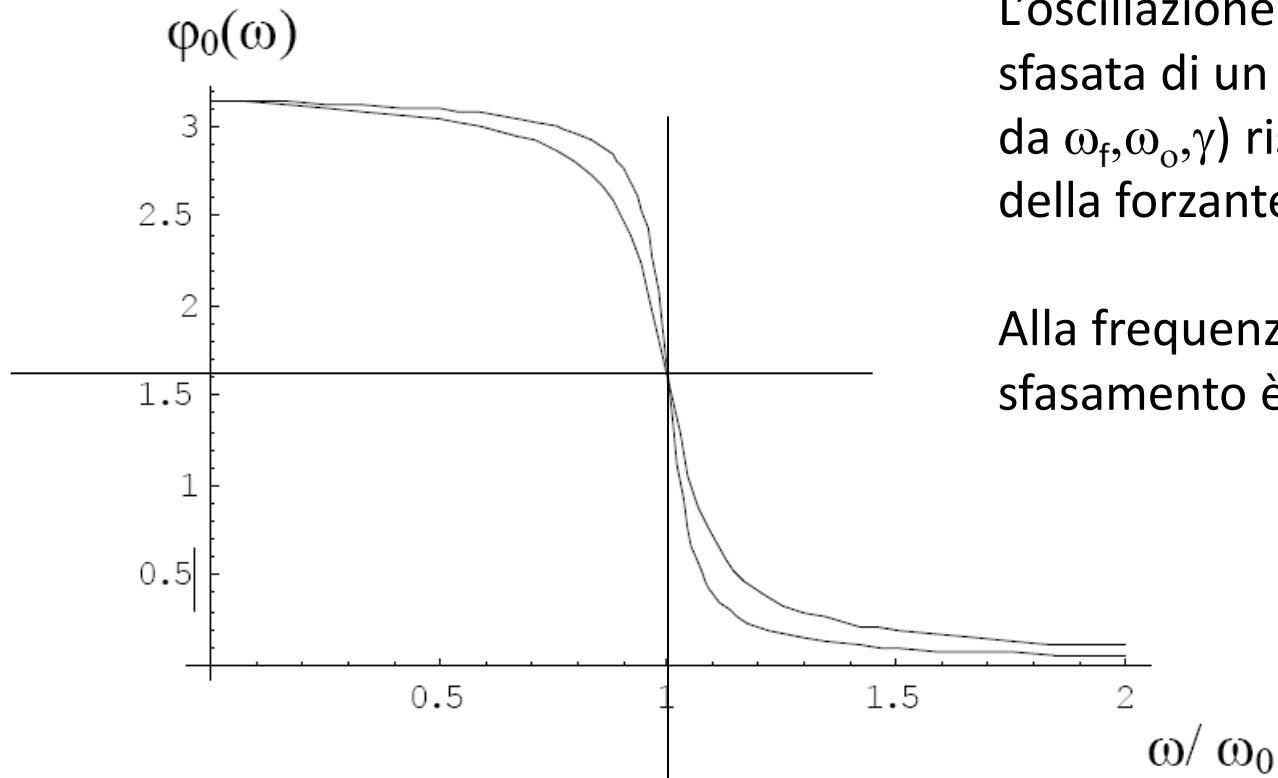
$$|A(t)|^2 = \frac{(F_o / m)^2}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}$$

Centroide $\Leftrightarrow \omega_o = \omega_f$

Dev. St. infinita

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

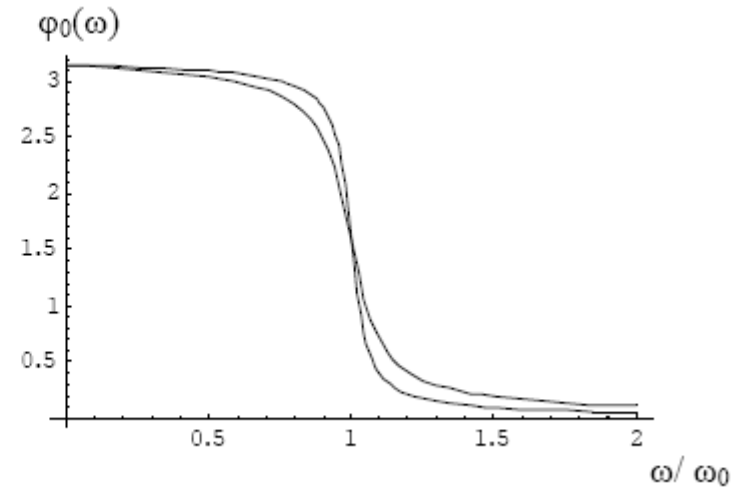
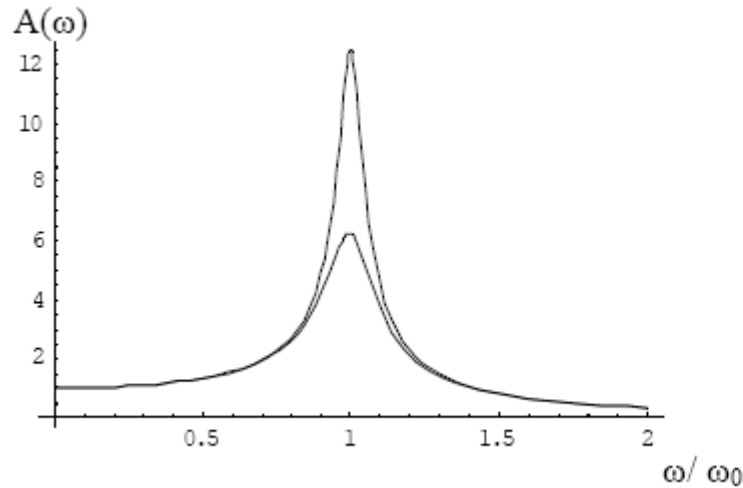
$$\tan(\varphi) = -\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_o^2 - \omega_f^2}$$



L'oscillazione della massa risulta sfasata di un angolo φ (che dipende da $\omega_f, \omega_o, \gamma$) rispetto all'oscillazione della forzante.

Alla frequenza di risonanza lo sfasamento è pari a $\pi/2$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$



In condizioni di risonanza:

- La forzante trasferisce la massima accelerazione alla massa *sempre* quando la massa possiede la massima velocità (sono sfasate di $\pi/2$).
- Il verso dell'accelerazione è quello che tende ad accelerare ulteriormente la massa, che quindi acquista energia a spese della forzante.
- Ad ogni ciclo viene trasferita un po' di energia dalla forzante alla massa.
- L'unica sottrazione di energia al moto della massa è dovuta dall'attrito.
- Senza attrito l'ampiezza di oscillazione $A(\omega)$ andrebbe all'infinito per $\omega_f = \omega_0$

La soluzione dell'equazione oraria del moto Forzato-Smorzato è quindi data dalla combinazione lineare della soluzione dell'omogenea associata (il moto smorzato) con una soluzione particolare dell'equazione differenziale.

$$\text{soluzione} = a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$x_1(t) = A_o e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t)$$

$$x_2(t) = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Notate:

- che le frequenze di oscillazione di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono differenti,
- che $x_1(t)$ ha una ampiezza che decresce nel tempo mentre $x_2(t)$ ha una ampiezza costante nel tempo

Riassumendo:

Dato una massa (che ipotizziamo puntiforme) appesa ad una molla (che ipotizziamo ideale e di massa trascurabile) che ha l'altro estremo fissato ad un punto (che ipotizziamo inamovibile), una forza di attrito (che ipotizziamo viscoso) come l'aria e sottoposta ad una forzante 'armonica'

La forza esercitata è:

$$F = ma = -k_o x - \beta \cdot \frac{dx}{dt} + F_o e^{i\omega_f t}$$

La soluzione è data dalla combinazione lineare della soluzione dell'equazione differenziale omogenea con una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea.

Il moto può quindi essere descritto dalla sovrapposizione di un moto oscillante smorzato (la cui ampiezza dipenda dall'ampiezza di oscillazione iniziale) e da un moto oscillatorio con ampiezza costante nel tempo ma dipendente dalle $\gamma, \omega_o, \omega_f$

$$x(t) = aA_o e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t) + b \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

$$x(t) = aA_o e^{-\gamma t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} t) + b \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Dato un sistema armonico forzato-smorzato in oscillazione

Sperimentalmente osserverò che:

A tempi brevi ($t \approx 1/\gamma$) il moto sarà complesso, di ampiezza variabile con il tempo e senza una particolare regolarità (entrambi i termini della soluzione contribuiscono al moto)

A tempi medi ($t > 1/\gamma$) il moto avrà una frequenza ragionevolmente 'costante' nel tempo e l'ampiezza tenderà a stabilizzarsi (il primo termine si è già sensibilmente attenuato e quindi inizia a dominare il secondo termine)

A tempi lunghi ($t \gg 1/\gamma$) il moto sarà oscillatorio avrà una frequenza costante pari a quella della forzante. L'ampiezza sarà fissa. (il primo termine è nullo, conta solo il secondo termine)

NOTA: poiché avete già misurato γ sapete a priori il tempo che è necessario attendere per osservare i tre casi precedenti

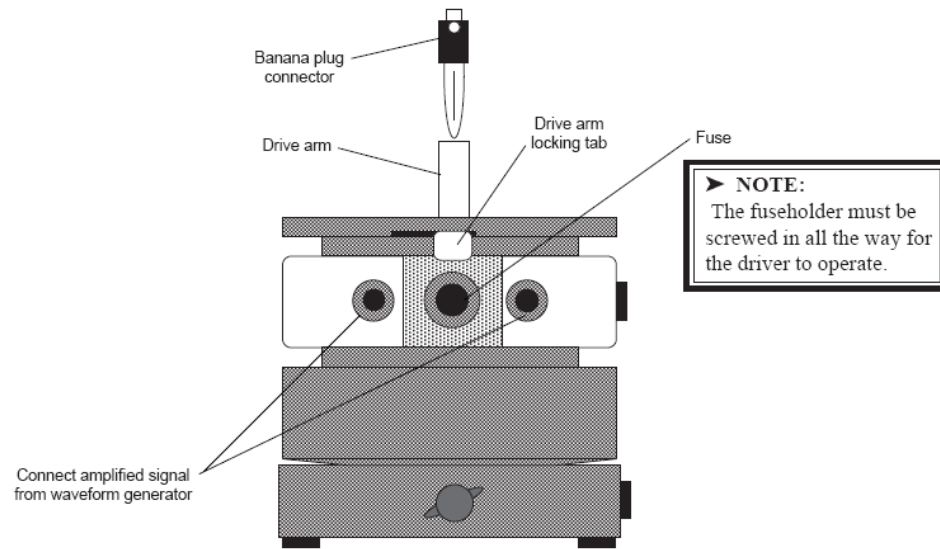
Esperienza molle III (Molla Smorzata Forzata)

Ricordatevi tutto quello detto per l'esperienza Molle 1 e 2
Ovviamente tutto quello detto prima è ancora valido

Prendete la stessa molla usata nella misura di γ .

Costruite attraverso le misure dell'ampiezza di oscillazione la curva di risonanza, Misurate cioè l'ampiezza di oscillazione della massa appesa alla molla al variare della frequenza della forzante ω_f (che voi fornite dall'esterno)

- Verificare che il massimo sia a ω_0 (il valore lo sapete dalle precedenti misure)
- Verificare che la FWHM dipende da γ (il valore lo sapete dalle precedenti misure)
- Verificare che la curva di risonanza sia una Lorentziana (test χ^2)



Nota:

Controllate la sicura dell'attuatore



Oscilloscopio



Generatore di segnali

Obiettivo dell'esperienza

Misura della curva di risonanza, misura cioè dell'ampiezza di oscillazione della massa appesa alla molla al variare della frequenza della forzante ω_f (che fornite esternamente)

- Verifica che il massimo sia a ω_0
- Verifica che la FWHM dipende da γ
- Verifica che la curva di risonanza sia una Lorentziana

Prima di partire con questa misura dovete conoscere:

- la costante K delle molle (con metodo statico e dinamico)
- i coefficienti di attrito γ e β (il coefficiente C_1)

Prima di iniziare l'esperienza dovete cercare le situazioni sperimentali ideali

Che molla e massa usare ?

Devo cercare la combinazione molla-massa appesa tale da avere la frequenza di risonanza ad un valore superiore ad 1 Hz (limite strumentale alla misura).

Che molla scelgo:

1. Conosco la costante elastica della molla
2. Conosco il contributo che ciascuna molla dà alla massa appesa
3. Sono in grado di stimare a priori la frequenza di risonanza e la FWHM della curva

$$\omega_{risonanza} = \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_{appesa} + m_{intrinseca}}} \quad \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] = \left[\frac{N}{m \cdot kg} \right]^{1/2} = \left[\frac{kg \cdot m}{\text{sec}^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{kg} \right]^{1/2}$$

$$FWHM = 2\sqrt{3} \gamma$$

Il generatore d'onde è in grado di fornire un'onda (meglio se con frequenza superiore ad 1.0 Hz e a passi di 0.1 Hz).

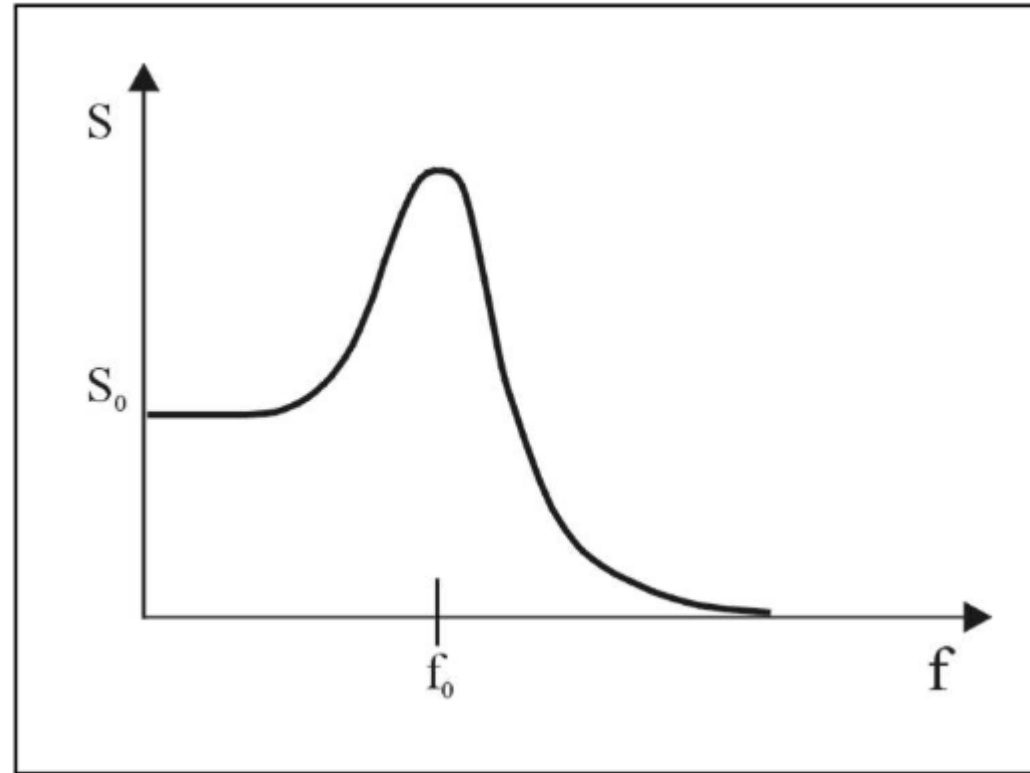
$$\omega_o > 2\pi\nu > 2 \cdot 3.14 \cdot 1 > 6.28$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m_{appesa} + m_{intrinseca}} > 6.28^2 = 40$$

$$k > 40 \cdot (m_{appesa} + m_{intrinseca})$$

La larghezza della lorenziana $FWHM = 2\sqrt{3}\gamma$ deve essere maggiore della variazione della frequenza che viene data all'attuatore

Grafico:



Ordinate: Modulo quadro dell'ampiezza di oscillazione

Ascisse: Frequenza dell'attuatore

Come verifico che la curva di risonanza sia una Lorenziana ?

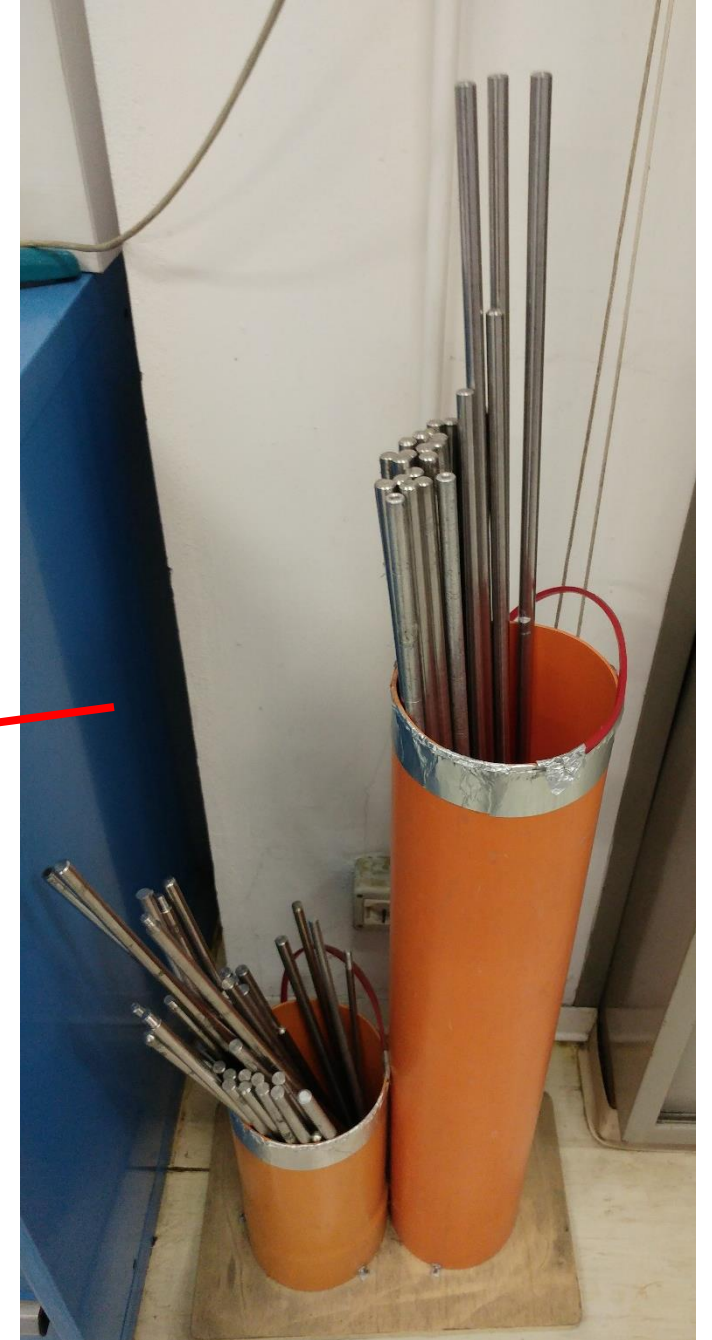
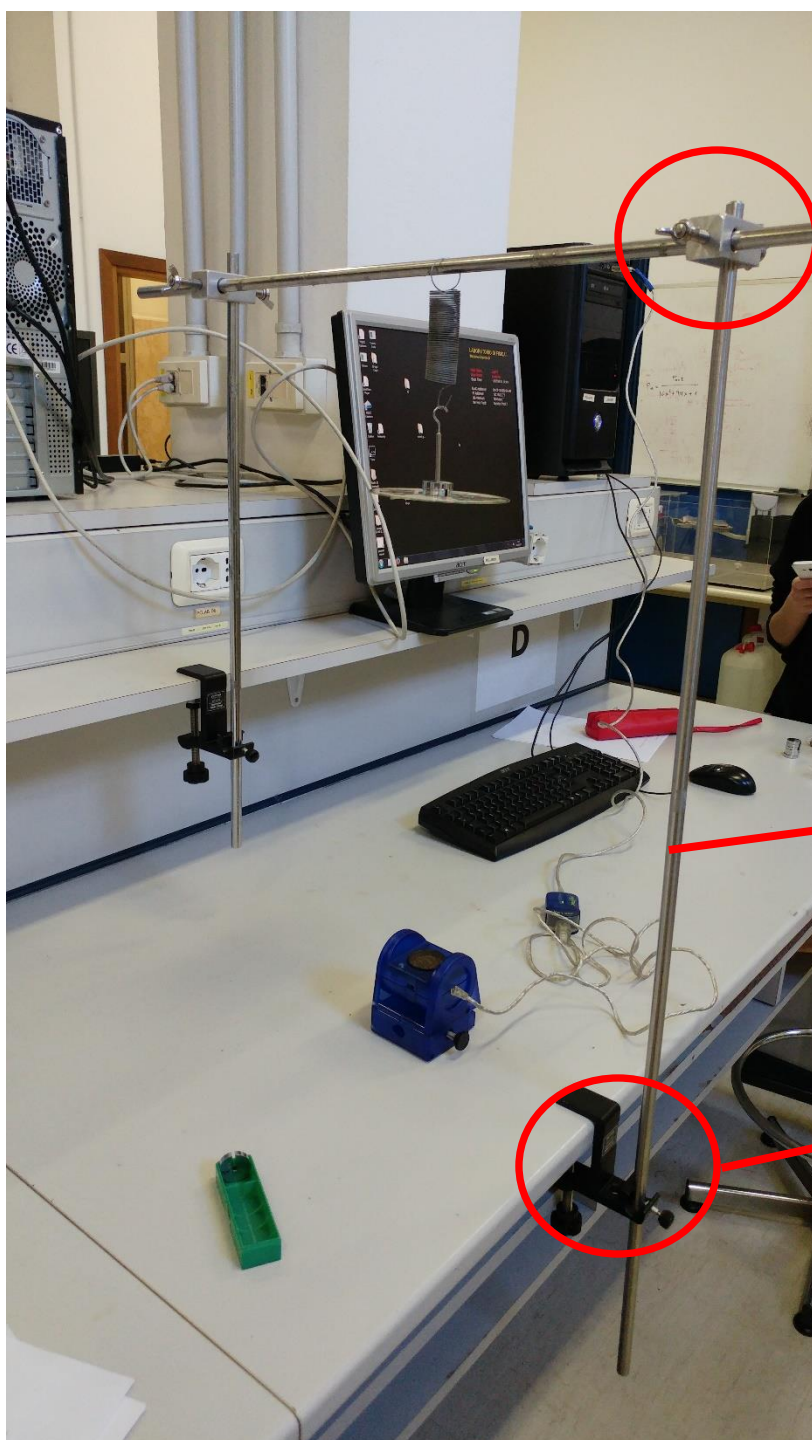
1. Conosco la costante elastica della molla K
2. Conosco il contributo che ciascuna molla dà alla massa appesa m_{eff}
3. Sono in grado di stimare a priori la frequenza di risonanza (a partire da K , m , m_{eff} e γ)
4. Sono in grado di stimare a priori (a partire da m , m_{eff} e γ) la larghezza a metà altezza della curva
5. Costruisco la lorenziana 'attesa'
6. La normalizzo ai dati sperimentali

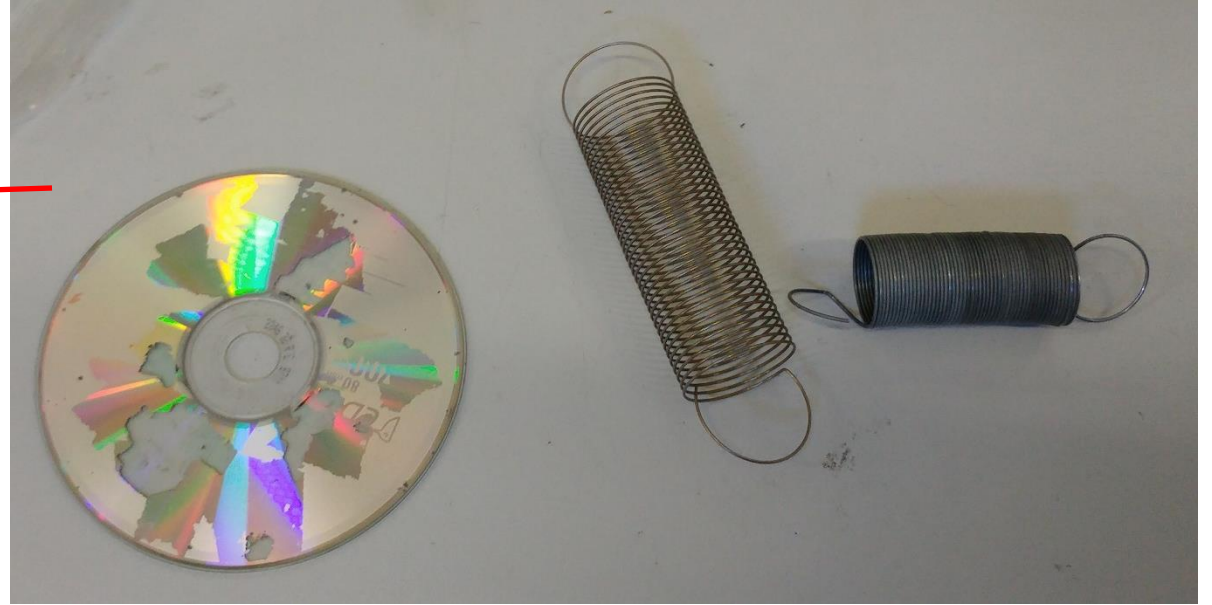
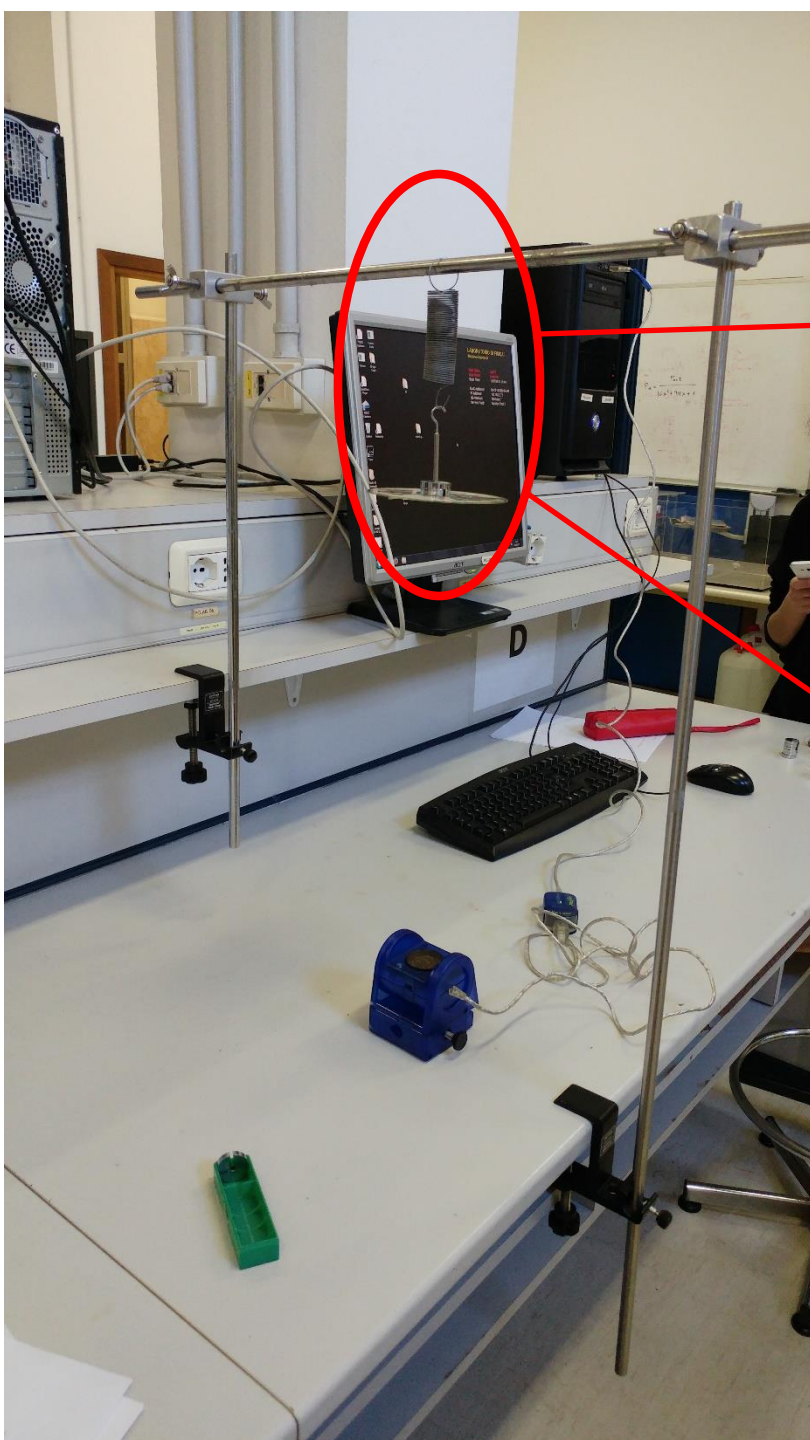
N = costante di normalizzazione

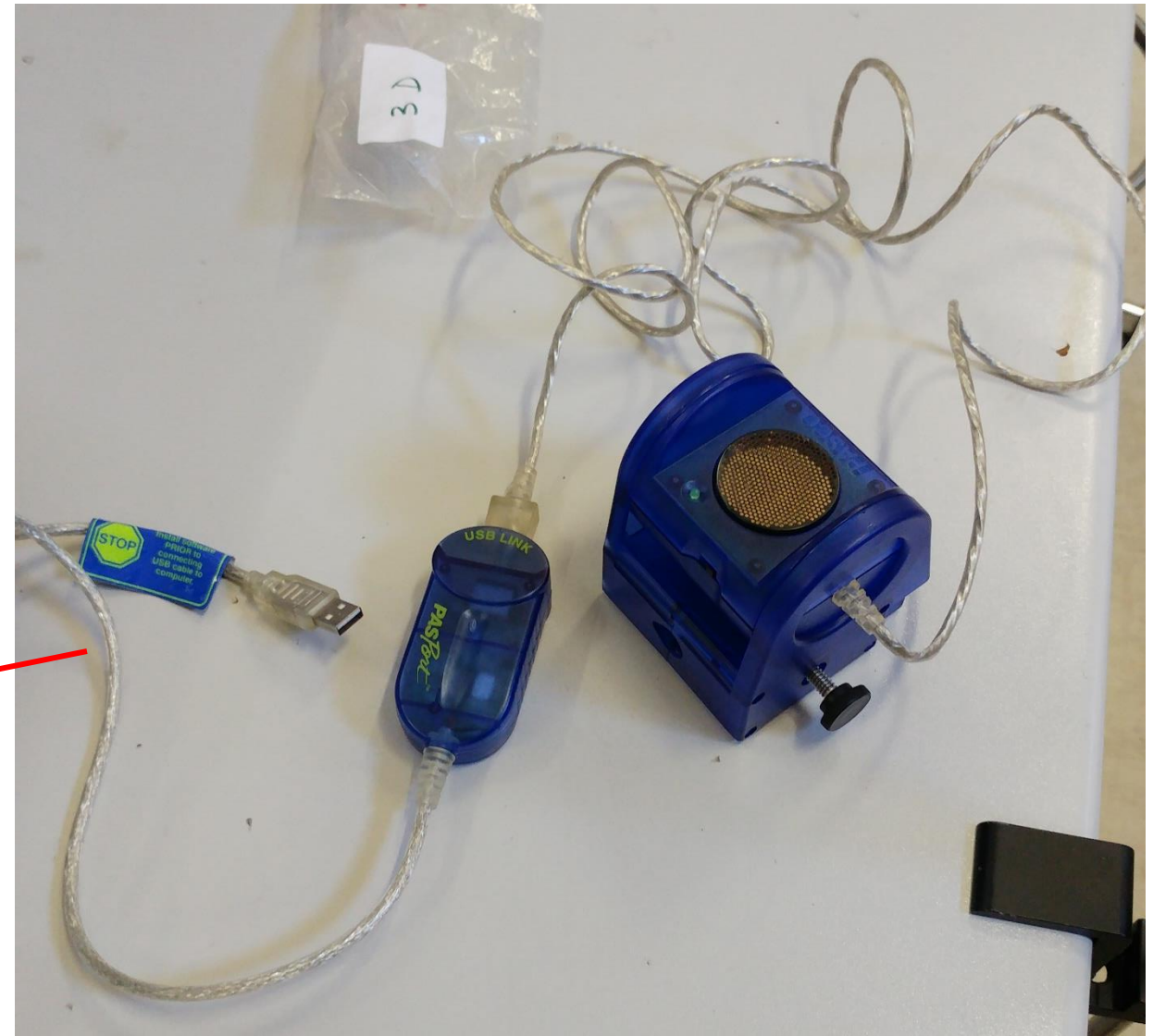
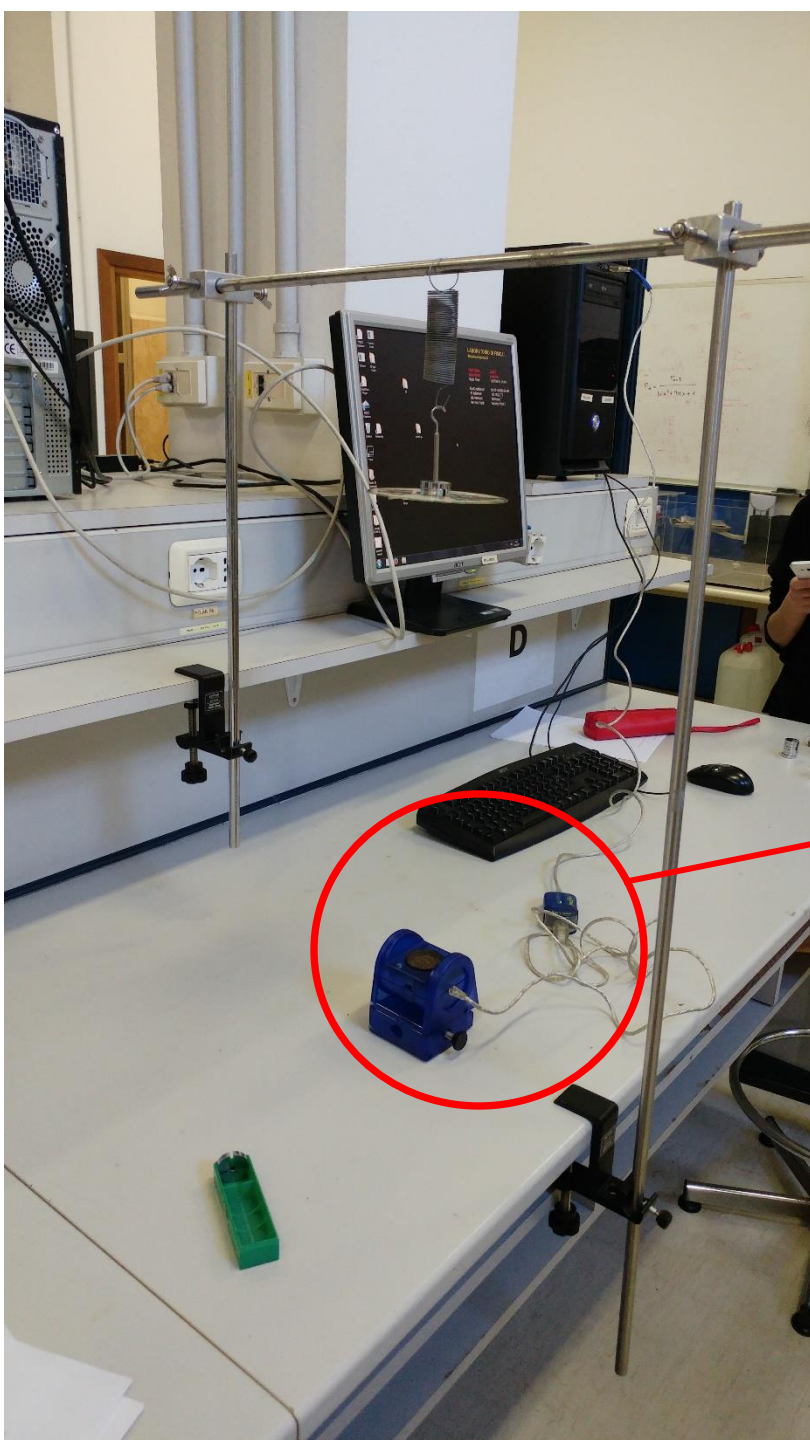
L = *Lorentziana* D = *curva misurata*

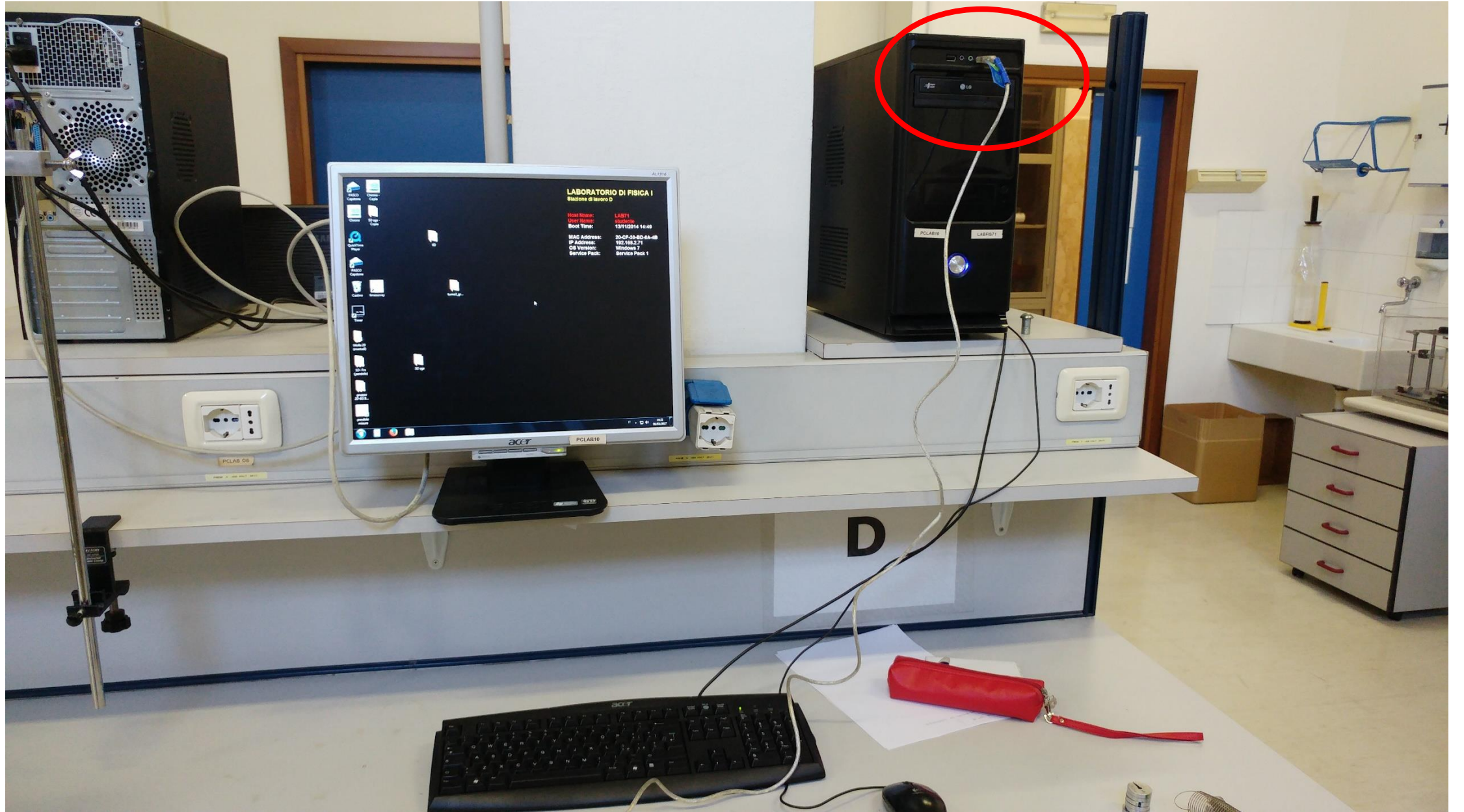
$$\sum_{j=k}^h L(v_j) = N \cdot \sum_{j=k}^h D(v_j)$$

Faccio un test del χ^2 per verificare l'ipotesi di curva Lorenziana











- Tools
- Hardware Setup
 - Data Summary
 - Calibration
 - Calculator

Drag a display onto the page or choose one of the QuickStart templates below.

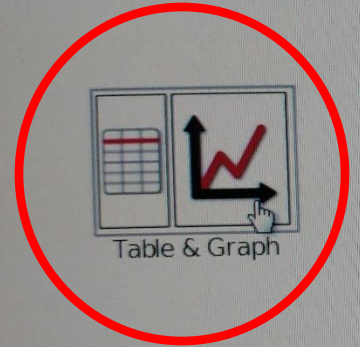
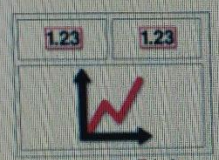
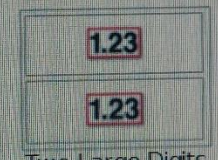


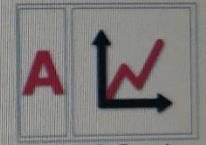
Table & Graph



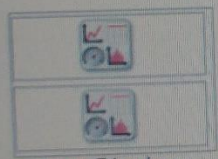
Graph & Digits



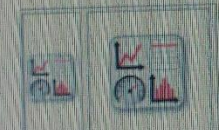
Two Large Digits



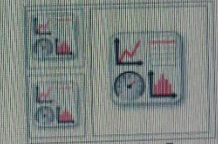
Text & Graph



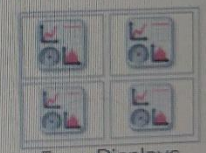
Two Displays



One Small, One Large Display



Two Small, One Large Display



Four Displays

- Displays
- Graph
 - Scope
 - FFT
 - Histogram
 - Digits
 - Meter
 - Table
 - Text Box
 - Text Entry Box
 - Image
 - Movie

Page #1

Tools

Hardware Setup

Data Summary

Calibration

Calculator

[Table title here]

	<No Data Selected>	<No Data Selected>
1	<Select Measurement>	<Select Measurement>
2	Create New	
3	Rename	
4	Motion Sensor	
5	Position (m)	
6	Velocity (m/s)	
7	Acceleration (m/s ²)	
8	Equations/Constants	
9	Constants	
10	Time	
11	Time (s)	
12	Index	
13	Index	
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		

[Graph title here]

Graph

Scope

FFT

Histogram

Digits

Meter

Table

Text Box

Text Entry Box

Image

Movie

