

Graziano Amati
numero di matricola: 758556
anno accademico: 2009/10
gruppo di laboratorio: 24

RELAZIONE DI LABORATORIO DI FISICA CON ELEMENTI DI STATISTICA

MOTI ROTATORI

L'esperienza si articola su due giornate di attività sperimentale. L'attività complessiva consiste nella misura di momenti d'inerzia di solidi e nella verifica sperimentale delle leggi di Huygens-Steiner e di conservazione del momento angolare.

L'apparato sperimentale, a meno dei differenti corpi rigidi utilizzati, è lo stesso in entrambe le giornate di laboratorio.

Sistema sperimentale

Per l'esperienza vengono utilizzati i seguenti strumenti:

- componente meccanica dell'apparato principale;
Ad un gancio cui viene connesso un corpo pesante di massa variabile; questi è a sua volta collegato ad un filo di nylon verticale fatto scorrere senza strisciare su una carrucola con asse orizzontale. La tensione imprime al cavo un'accelerazione costante a . Il filo viene poi fatto scorrere senza strisciare attorno ad una puleggia orizzontale, a cui è possibile connettere in modo solidale e coassiale corpi rigidi di varia forma e massa. In questo modo l'accelerazione del filo viene convertita in accelerazione angolare di rotazione α per il corpo rigido. E' possibile selezionare la lunghezza del raggio di avvolgimento del filo attorno alla puleggia mediante la presenza di diverse scanalature circolari.
- varie masse componibili;
Grazie ad esse è possibile imprimere ai corpi rigidi connessi all'apparato un'accelerazione angolare opportuna (le masse possono essere connesse ad un gancio e lasciate cadere);
- tre corpi rigidi forniti dalla casa costruttrice;
Sono strutturati così da poter ruotare coassialmente alla puleggia, in modo solidale con essa.
- componente elettronica dell'apparato principale;
Un sensore LED connesso ad un PC conta nel tempo il numero di fori disposti radialmente su di disco solidale e coassiale con la puleggia; il numero di conteggi al variare del tempo viene raccolto mediante il software 'Datastudio'. Il programma processa inoltre i dati di conteggio e di tempo registrati per fornire un set di stime dell'accelerazione angolare di rotazione o della velocità angolare del perno al variare del tempo; è possibile infine visualizzare plot delle grandezze osservate (in ambo le giornate si configurano le dimensioni degli angoli visualizzati in rad).
- una massa quadra (impiegata nella messa in piano del sistema);

- bilancia di precisione;
- calibro;

PRIMA GIORNATA

Obiettivi

Si vuole:

- misurare il momento d'inerzia di un disco rigido;
- misurare il momento d'inerzia dello stesso disco cui si sovrapponga assialmente un anello rigido;
- estrarre per differenza il momento di inerzia del disco;
- confrontare i valori misurati con quanto atteso in teoria.

Idealmente, il momento d'inerzia I di un corpo rigido collegato al sistema è dato da:

$$I = m r / \alpha (g - \alpha r)$$

ove r è il raggio della puleggia orizzontale, α l'accelerazione angolare di rotazione della stessa (coincidente con l'accelerazione angolare del corpo rigido), m la massa del corpo lasciato cadere verticalmente, g è l'accelerazione di gravità (di valore noto $g = 9.81 \pm 0.01 \text{ m/s}^2$). Le tre grandezze di cui occorre misurare i valori sono pertanto r , m , α .

Fase preliminare di preparazione dell'apparato

Si vuole ottimizzare la configurazione di orizzontalità del piano di rotazione del corpo rigido. A tal fine si connette alla puleggia una sbarra e si dispone ad una sua estremità una massa quadra. Il corpo composto così creato ha dunque un baricentro spostato rispetto all'asse di rotazione. Se il sistema non fosse perfettamente in piano, il momento indotto dalla forza peso del sistema sbarra + massa determinerebbe una rotazione dello strumento. Segue pertanto che la miglior condizione di orizzontalità del piano di rotazione è quella in cui il corpo composto è fermo. La condizione di staticità è ottenuta mediante regolazione di viti alla base dello strumento rotatorio; la valutazione avviene rispetto a due assi di riferimento dati dalle diagonali della base ad "A" dell'apparato.

Si calcolano i momenti d'inerzia attesi per il disco e un sistema composto dal disco sovrapposto coassialmente all'anello. Per differenza si ricava poi il momento d'inerzia del solo anello. Si confrontano poi i valori misurati con quelli attesi in teoria e si valuta la configurazione di misura ottimale, oltre a fonti di eventuali errori sistematici.

La parte dinamica della misura riguarda la determinazione dell'accelerazione angolare del sistema. Raccolti i dati raw di quest'ultima al variare del tempo, si effettuano quattro smooth su pacchetti di cinque valori. Questa scelta è dovuta al fatto che si è visto che in ogni misura dopo questa quantità di smooth l'andamento dell'accelerazione nel tempo si stabilizza su una curva ben definita; avendo scelto pacchetti piccoli, è possibile osservare graficamente le progressive variazioni dell'andamento di questa grandezza. Si è mantenuta questa modalità per tutte le misure dinamiche (di accelerazioni e velocità angolari) in ambo le giornate.

Aalisi dati

DISCO

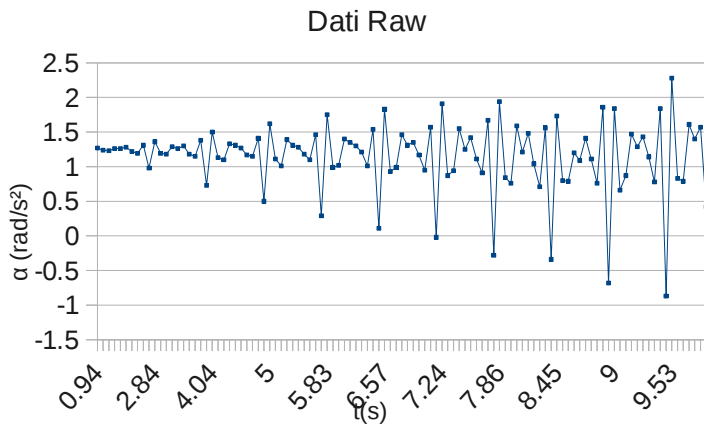
Si riportano di seguito i parametri sperimentali del disco impiegato, oltre che il valore del momento d'inerzia atteso $I_{teo} = 1/2 M R^2$, ove M e R rappresentano rispettivamente la massa e il raggio del corpo. Gli errori su R e M sono stati dedotti dalla sensibilità di misura degli strumenti impiegati. L'errore su I_{teo} è stato determinato mediante propagazione degli errori.

DISCO

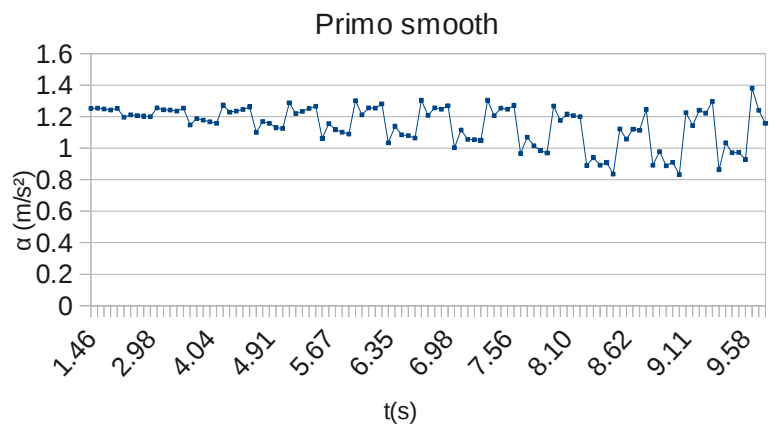
M (kg)	σM	R (m)	σR	I_{teo} (kg m ²)	σI
1.4076	0.0001	0.1143	0.0005	0.00921	0.00008

Segue la serie dei plot ottenuti per la prima massa. In modo analogo si è proceduto negli altri processi di misura. Si osserva la già citata stabilizzazione dell'andamento dell'accelerazione dal quarto smooth.

α disco, massa 1

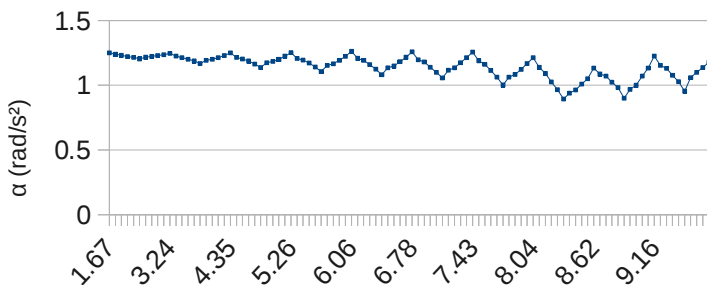


α disco, massa 1



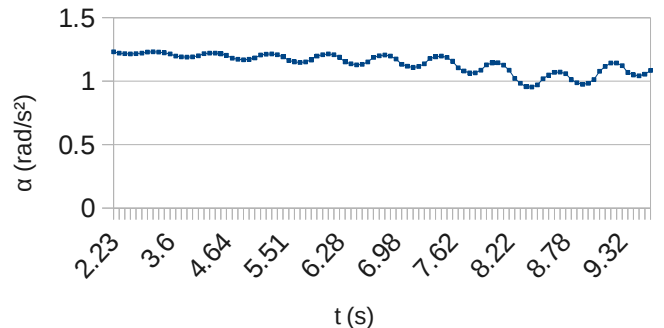
α disco, massa 1

Secondo smooth

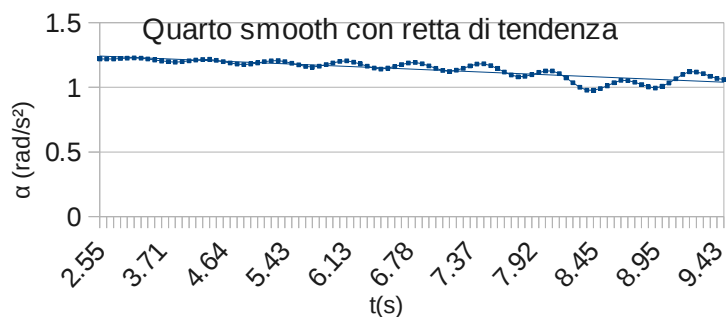


α disco, massa 1

Terzo smooth



α Disco, massa 1



Il raggio r_p della puleggia sottostante il corpo rigido è stato fissato in questa configurazione e in tutte le successive, in entrambe le giornate, al valore di 0.012 ± 0.005 m.

Si riporta una tabella che riassume le misure effettuate per il calcolo del momento d'inerzia del sistema. Con m si intende la massa appesa.

L'accelerazione angolare α viene estrapolata dalla retta di regressione come $\alpha = a + b \cdot t_0$, con t_0 tempo iniziale di misura (si minimizza in questo modo l'effetto degli attriti sul sistema).

DISCO

m (kg)	σ_m	a	b	σ_a	σ_b	$\sigma_y = \sigma_\alpha$	t_0 (s)	σ_{t_0}	α (rad/s ²)	I (kg m ²)	σ_I
0.0993	0.0005	1.332	-0.03	0.014	0.002	0.039	0.61	0.1	1.31	0.0089	0.0008
0.139	0.0005	1.787	-0.025	0.015	0.003	0.045	0.35	0.1	1.78	0.0092	0.0008
0.1789	0.0005	2.291	-0.023	0.013	0.003	0.038	0.29	0.1	2.28	0.0092	0.0008

Il momento d'inerzia complessivo viene estrapolato come media pesata dei valori misurati.

$$I_{mis\ d} = 0,0091 \pm 0,0005 \text{ kg m}^2 .$$

Rispetto al valore I_{teo} riportato sopra, questa grandezza presenta una discrepanza pari a $d=0,28$. La misura risulta pertanto accettabile entro il limite di confidenza di una deviazione standard (considerando come σ l'errore complessivo somma in quadratura delle incertezze del momento d'inerzia atteso e misurato).

DISCO + ANELLO

Si connette ora coassialmente al disco un anello mediante opportuna scanalatura circolare. Il momento d'inerzia totale atteso è la somma dei contributi dei due componenti. Nella tabella che segue sono raccolte le misure significative dei corpi in questa fase e i momenti d'inerzia attesi.

ANELLO

M (kg)	σ_M	R_{int} (m)	R_{est} (m)	σ_R	I_{teo} (kg m ²)	σ_I
1.4503	0.0001	0.0538	0.06378	0.0001	0.00505	0.00001

DISCO + ANELLO

I_{teo} (kg m ²)	σ_I
0.01424	0.00003

La seguente tabella raccoglie analogamente a sopra le misure dinamiche effettuate nella configurazione attuale.

DISCO + ANELLO

m (kg)	σ_m	a	b	σ_a	σ_b	$\sigma_y = \sigma_\alpha$	t_0 (s)	σ_{t_0}	α (rad/s ²)	I (kg m ²)	σ_I
0.0993	0.0001	0.74	-0.001	0.009	0.001	0.024	0.96	0.05	0.74	0.0158	0.0014
0.139	0.0001	1.149	-0.012	0.009	0.001	0.024	0.51	0.05	1.14	0.0143	0.0012
0.1789	0.0001	1.439	-0.006	0.011	0.002	0.029	0.65	0.05	1.44	0.0146	0.0013

La media pesata del momento d'inerzia del sistema disco + anello vale dunque

$$I_{mis\ d+a} = 0,0148 \pm 0,0007 \text{ kg m}^2 .$$

La discrepanza rispetto al valore atteso è pari a $d = 0,76$ e dunque garantisce l'accettabilità della misura entro limite di confidenza di una deviazione standard.

Per differenza, il momento d'inerzia del solo anello vale

$$I_{\text{mis a}} = 0,0057 \pm 0,0009 \text{ kg m}^2 .$$

La misura presenta una discrepanza di $d=0.80$ rispetto al valore atteso, accettabile entro i limiti di una σ .

Si osserva infine che l'errore relativo nella misura dei momenti d'inerzia è dello stesso ordine sia nel caso del solo disco che nel caso del sistema disco + anello. Ciò riflette coerentemente la ripetizione degli stessi procedimenti di misura ed analisi dati nei due casi.

SECONDA GIORNATA

Obiettivo:

Si vuole:

- verificare la legge di proporzionalità diretta tra momento d'inerzia di una massa puntiforme e il quadrato della sua distanza dall'asse di rotazione (proporzionalità legittimata dalla legge di Huygens-Steiner);
-
- verificare la legge di conservazione del momento angolare per un dato corpo in rotazione rispetto a un asse, al variare della distanza tra il corpo e l'asse di rotazione.

Per il teorema di Huygens-Steiner, il momento d'inerzia totale del sistema sbarra + massa puntiforme, vale:

$$I_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M l^2 + m d^2 ,$$

ove M ed l sono rispettivamente la massa e la lunghezza della sbarra adottata, m il valore della massa idealmente puntiforme e d la sua distanza dall'asse di rotazione.

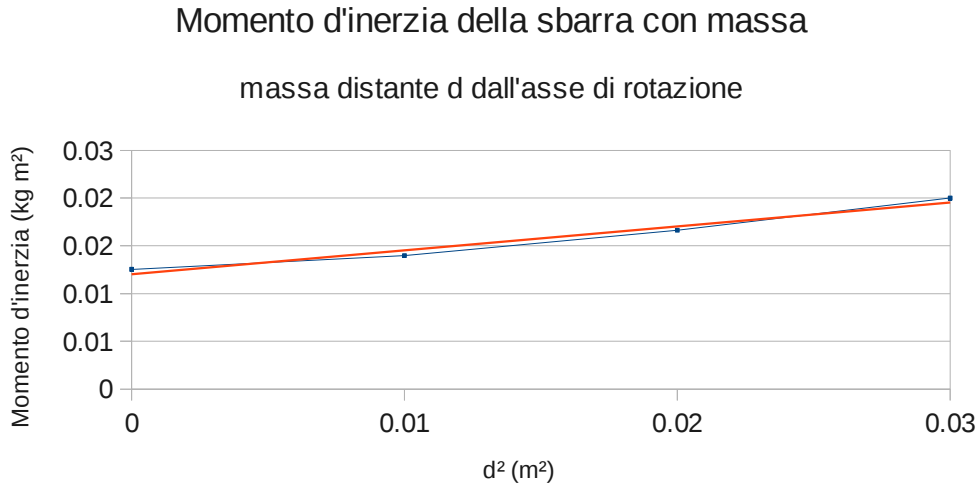
Aalisi dati

Al fine di verificare la relazione di proporzionalità tra il momento d'inerzia I_{tot} e la massa m , si è fissata una massa quadra sulla sbarra per quattro distanze d dall'asse di rotazione del sistema. Misurando il momento d'inerzia del corpo composto col metodo dinamico precedente, è stato possibile verificare la relazione di proporzionalità suddetta nonché estrarre il momento d'inerzia della sola sbarra; quest'ultimo valore è stato dunque confrontato con quello direttamente misurato per la sola sbarra, ancora col metodo precedente. Segue il resoconto sperimentale del procedimento sin qui descritto.

Momenti d'inerzia con massa distante d dall'asse:

distanza d (m)	σ_d	I (kg m ²)	σ_I
0.05	0.01	0.013	0.001
0.09	0.01	0.014	0.002
0.13	0.01	0.017	0.002
0.17	0.01	0.020	0.002

La relazione di linearità suddetta risulta visibile in un plot dei momenti misurati in funzione di d^2 .



Mediante regressione lineare dei parametri precedenti, si determina infine il valore di $I(d=0)$, ovvero l'intercetta del grafico riportato. Esso corrisponde a

$$I(d=0) = 0.012 \pm 0.001 \text{ kg m}^2.$$

Il momento d'inerzia della sola sbarra senza massa calcolata col metodo dinamico vale:

$$I_{\text{mis}} = 0.011 \pm 0.001 \text{ kg m}^2.$$

Segue quindi la compatibilità tra i due valori.

Per la geometria irregolare della sbarra adottata (essa presenta un solco superficiale oltre a un supporto metallico tetraedrico sul lato inferiore) una quantificazione esatta del momento atteso della sola sbarra sarebbe risultata eccessivamente laboriosa.

E' infine possibile valutare la proporzionalità tra I e d^2 verificando che il coefficiente R di correlazione lineare è massimizzato in questa configurazione rispetto al valore che assume confrontando I con d e I con d^3 . Nella tabella seguente si raccolgono le misure e l'analisi dati illustrata.

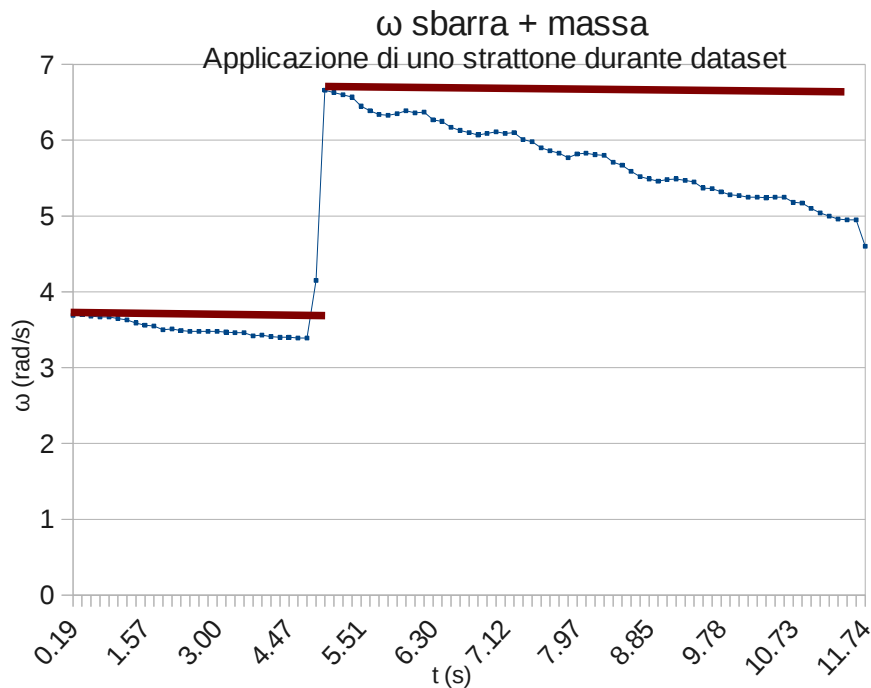
	X=r	X =r ²	X=r ³	Y = I
	0.05	0.0025	0.00013	0.013
	0.09	0.0081	0.00073	0.014
	0.13	0.0169	0.0022	0.017
	0.17	0.0289	0.00491	0.020
R	0.9852	0.0997	0.9919	

La seconda parte della seconda giornata di lavoro consiste nella verifica della conservazione del momento angolare per un sistema isolato. Si dispone pertanto una massa scorrevole lungo l'asta connessa ad un filo, cosicché sia possibile avvicinare la massa al centro del sistema durante la sua rotazione mediante uno strattone al filo. In questo modo i valori delle velocità angolari iniziali e finali ω_i e ω_f e i rispettivi momenti d'inerzia I_i e I_f risultano legati dalla relazione:

$$\omega_i I_i = \omega_f I_f .$$

Si imposta quindi il software utilizzato in modalità di acquisizione della velocità angolare dell'apparato rotatorio al variare del tempo.

Si riporta di seguito il plot contenente dati raw e i valori delle velocità angolari costanti valutate in tempi tali da minimizzare gli effetti di attriti entro il sistema. Dato la chiara leggibilità dei valori della velocità nei tempi di minima incidenza degli attriti, si è considerata poco significativa la possibilità di effettuare smooth sulle misure.



Seguono i valori dei momenti d'inerzia e delle velocità angolari misurati prima e dopo l'applicazione dello strattone.

VELOCITÀ ANGOLARE

	a	b	σ_a	σ_b	σ_y	t0	$\omega=a+bt_0$	σ_ω
inizio	3.694	-0.07	0.011	0.004	0.027	0.19	3.68	0.01
fine	7.915	-0.262	0.036	0.004	0.065	5.13	6.57	0.04

MOMENTO D'INERZIA

	I (kg m ²)	σ_I
inizio	0.0231	0.0021
fine	0.0146	0.0013

Si deducono infine i valori di

$$I_1 \omega_1 = 0.09 \pm 0.01 \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

$$I_2 \omega_2 = 0.10 \pm 0.01 \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

che verificano la relazione d'identità entro gli errori sperimentali. L'errore relativo nelle misure finali risulta comunque elevato (dell'ordine del 10% in ambo le misure). Dalla propagazione degli errori si evince che la fonte d'errore prevalente risulta essere la velocità angolare. Non è comunque possibile una minimizzazione ulteriore dell'errore ad essa connesso per il limite di precisione sul tempo che lo strattone di durata finita impone sul sistema.