

**Graziano Amati**  
**numero di matricola: 758556**  
**anno accademico: 2009/10**  
**gruppo di laboratorio: 24**

**RELAZIONE DI LABORATORIO DI FISICA CON ELEMENTI DI STATISTICA**  
**SCHEDE DELL'ESPERIENZA DEI DADI**

**Obiettivo dell'esperienza e risultati attesi**

L'esperienza si propone di valutare quantitativamente valori random determinati lanciando contemporaneamente due dadi per  $N = 100$  volte; i dadi presentano lo stesso numero di  $n_{\text{facce}} = 8$  facce e sono distinguibili, essendo di colori diversi. Dallo studio dell'andamento delle grandezze statistiche rilevanti si vuole determinare se i comportamenti osservati nei due dadi siano tra loro coerenti e se almeno uno di essi sia truccato.

La distribuzione attesa dei valori estratti da un singolo dado è idealmente costante; la probabilità di uscita di una qualsiasi faccia è pertanto data da:

$$p_i = 1/n_{\text{facce}}, \quad i = 1, \dots, n_{\text{facce}} .$$

Per una coppia di dadi invece la distribuzione dei valori attesi viene determinata da quella di ciascun dado nel modo seguente: dato un possibile esito somma dei valori dei due dadi, si considera il numero di coppie di numeri estraibili dai due dadi che fornisce la somma voluta; ciascuna coppia ha una probabilità di estrazione data dal prodotto delle probabilità  $p_i$  di uscita di ciascun valore; si sommano i prodotti di probabilità così determinati.

Il valore atteso per ciascuna delle due distribuzioni è definito come media algebrica dei valori estratti pesata sulle probabilità di estrazione. Se la distribuzione di probabilità fosse stata riferita a variabili random continue, la media algebrica sarebbe stata sostituita con una media integrale.

Per un singolo dado si ottiene pertanto:

$$X_{1\text{att}} = X_{2\text{att}} = 4.5 ;$$

la media pesata coincide infatti con quella aritmetica per pesi costanti, come si ha in questo caso.

Per la somma di due dadi il valore atteso calcolato col metodo sopra descritto è:

$$X_{1\text{att}} + X_{2\text{att}} = 9 .$$

Sia nel caso di singolo lancio che in quello di lancio multiplo, è idealmente attesa una convergenza delle medie a questi valori attesi ripetendo l'estrazione un numero di volte sufficientemente grande. Nel caso di somma di variabili random (come avviene in questo caso), la classe dei teoremi statistici del limite prevedono la convergenza nel bacino gaussiano per la distribuzione in frequenza dei risultati ottenuti.

L'errore assegnato al valor medio empirico delle estrazioni (sia per ciascuno dei due dadi che per la somma delle estrazioni) è dato dalla deviazione standard dalla media; quest'ultima fornisce un'espressione quantitativa dello scostamento della media dal valore atteso.

## Materiale a disposizione

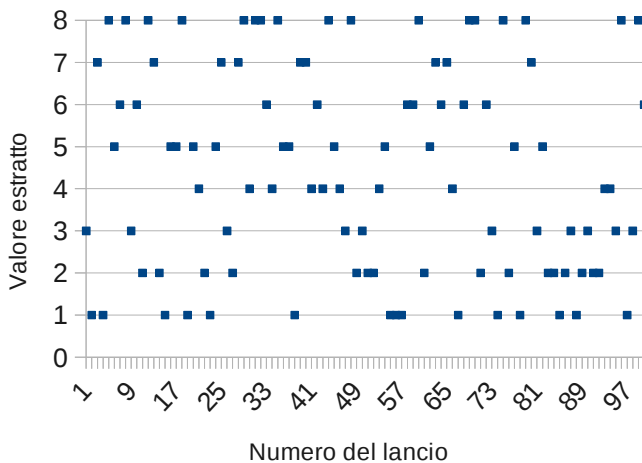
Per l'esperienza viene utilizzata una coppia di dadi di colori differenti, ognuno di 8 facce. L'elaborazione dei dati, nonché la creazione dei plot ad essa relativi viene effettuata mediante foglio elettronico.

### SCHEDA N° 1 Andamento delle estrazioni lungo i lanci

I dati ottenuti da ciascun dado vengono plottati entro due grafici separati.

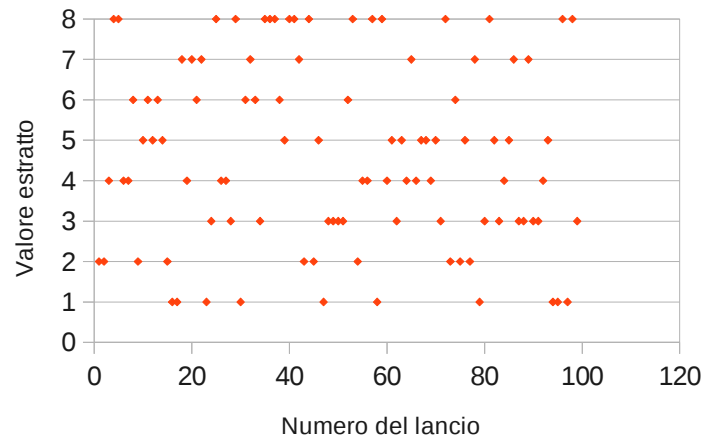
#### Valori estratti per il dado 1

andamento lungo i lanci



#### Valori estratti per il dado 2

andamento lungo i lanci

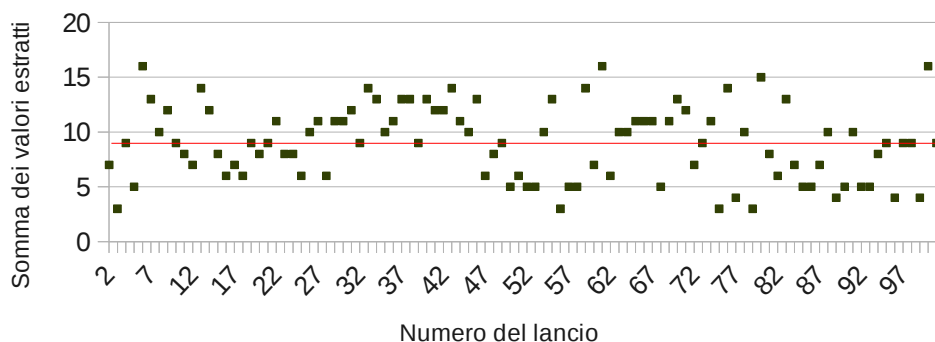


Da una prima indagine qualitativa si osserva una buona dispersione dei valori raccolti, il che allontana ad un primo livello il sospetto che i dadi adottati siano truccati.

Il grafico seguente rappresenta un plot dei valori ottenuti per la somma dei due dadi. Si può osservare un addensamento dei valori estratti in prossimità del valore atteso (linea rossa).

#### Somma dei valori estratti dai due dati

andamento lungo i lanci

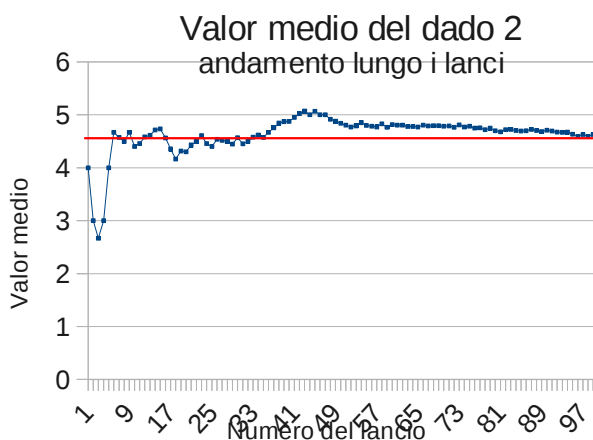
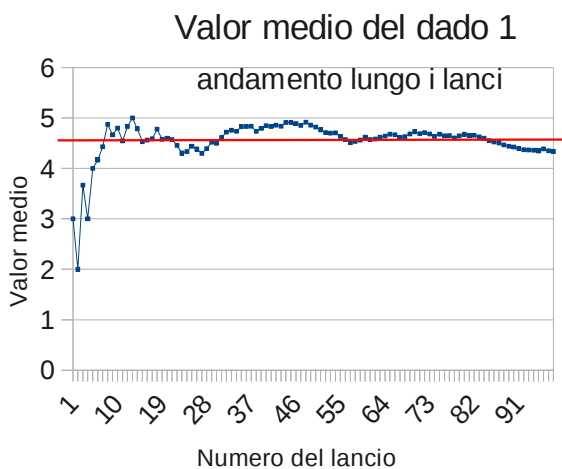


Nella seguente tabella sono raccolti i valori medi  $\langle x \rangle$ , deviazioni standard  $\sigma$  e deviazioni standard dalla media  $\sigma_m$  associati ai tre plot sopra riportati. Le grandezze sono valutate a livello sia teorico che sperimentale. Si riporta inoltre per il valor medio la discrepanza  $d$  rispetto al corrispondente valore atteso. Il numero di estrazioni attese adottato nel calcolo della deviazione standard e della SDOM è dato dalla fattorizzazione tra il numero totale di estrazioni ( $N = 100$ ) e la probabilità assegnata ad una singola estrazione.

	$\langle X \rangle_{\text{mis}}$	$\langle X \rangle_{\text{att}}$	$d_{\langle X \rangle}$	$\sigma_{\text{mis}}$	$\sigma_{\text{att}}$	$\sigma_m \text{ mis}$	$\sigma_m \text{ att}$
<b>dado 1</b>	4.39	4.5	0.22	2.46	2.30	0.25	0.23
<b>dado 2</b>	4.61	4.5	0.23	2.27	2.30	0.23	0.23
<b>dado 1 + dado 2</b>	9	9	0	3.34	3.26	0.33	0.33

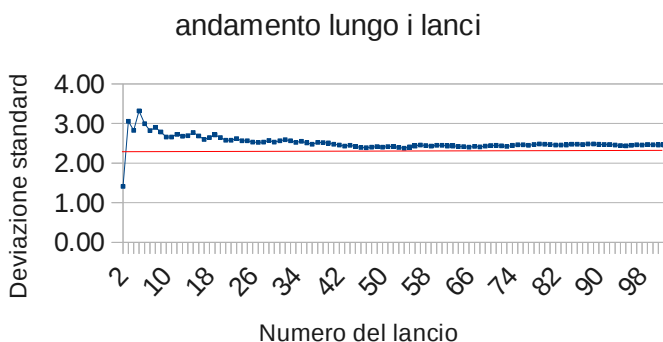
Si osserva l'annullamento della discrepanza nel caso della somma dei due dadi. Si deduce che questa configurazione ottimizza la convergenza al valore atteso meglio di quanto avvenga per ogni singolo dado. Si nota inoltre che il primo dado presenta una deviazione standard maggiore rispetto al secondo; a ciò corrisponde una maggior dispersione dei risultati raccolti. Questo elemento è indice di una possibile differenza nel comportamento dei dadi; si rimandano affermazioni definitive in merito all'analisi statistica più approfondita in seguito.

Nei due grafici successivi viene descritto l'andamento del valor medio lungo i lanci.



Si riporta ora l'andamento della deviazione standard del campione lungo i lanci. L'asse delle ascisse inizia a partire dal secondo lancio poiché tale grandezza assume significato solo per un numero di estrazioni maggiore di uno.

Deviazione standard per il dado 1



Deviazione standard per il dado 2

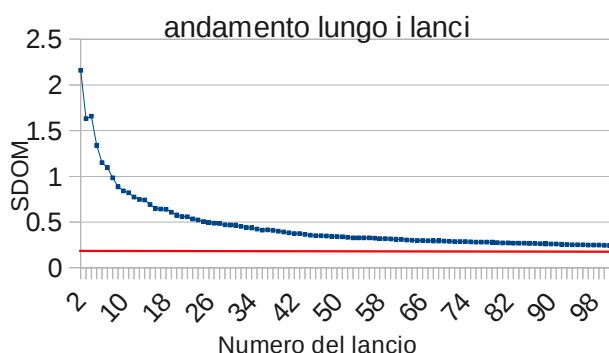


Il valore atteso per la deviazione standard (rappresentato dalla linea rossa nei due grafici superiori) è stato valutato considerando un numero di occorrenze per ciascuna faccia di ciascun dado pari a

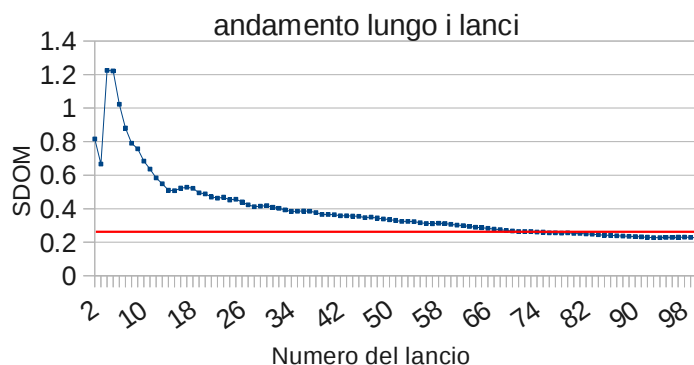
$$v_i = n p_i, \text{ con } p_i = 1/8, i=1, \dots, 8.$$

Segue una rappresentazione dell'andamento della deviazione standard della media (SDOM) lungo i lanci.

SDOM per il dado 1

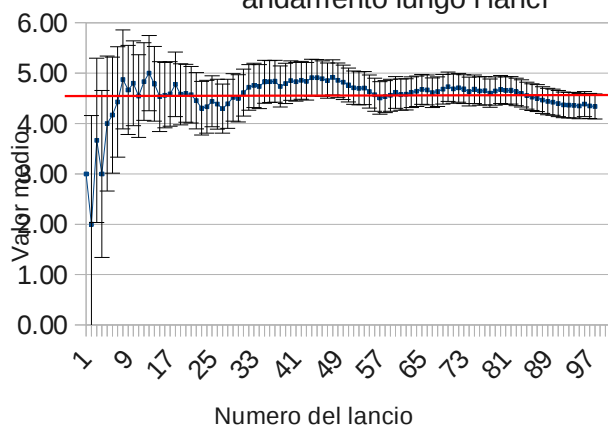


SDOM per il dado 2

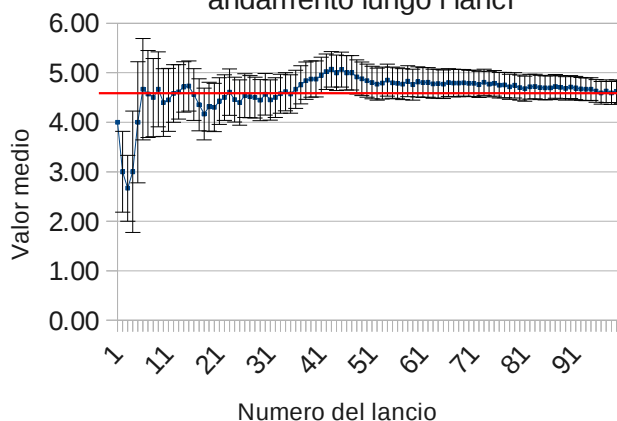


Una valutazione quantitativamente più esauriente dell'andamento del valor medio nei lanci è fornita nei plot seguenti, in cui si sono aggiunte le barre d'errore date dalla deviazione standard della media ai valori delle medie sperimentali.

Valor medio del dado 1 (con barre d'err.)  
andamento lungo i lanci



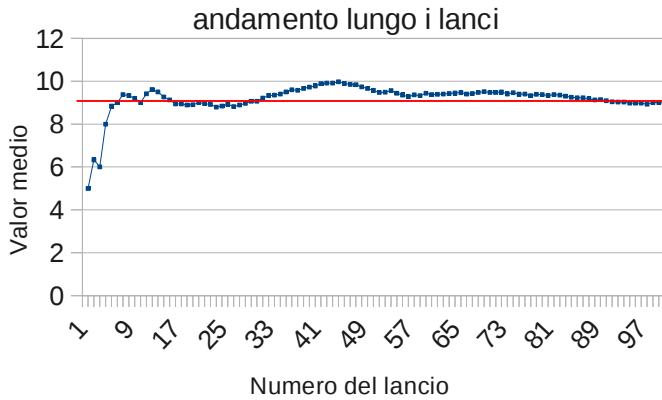
Valor medio del dado 2 (con barre d'err.)  
andamento lungo i lanci



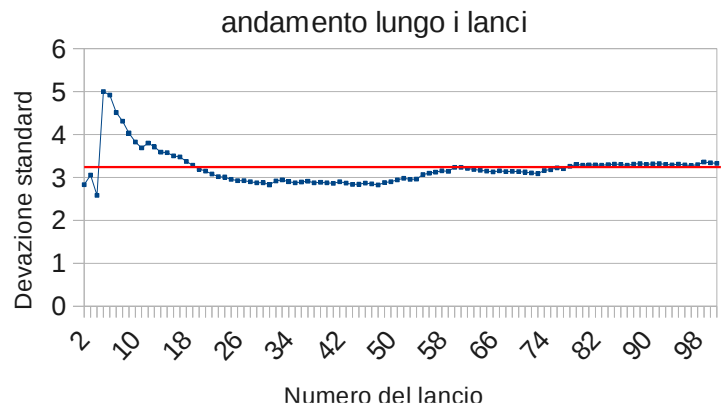
Gli andamenti osservati in ciascun'occorrenza permettono di concludere che ciascuno dei due dadi si comporta in modo coerente con le attese. Con un numero di 100 lanci si riesce ad osservare una valida stabilizzazione degli andamenti a valori confrontabili con quelli attesi. Da questi ultimi plot non appare alcuna evidenza circa la possibilità che i due dadi siano truccati.

In esatta analogia con quanto fatto per ciascuno dei due dadi separatamente, si riporta ora l'andamento delle quantità statistiche significative per la somma dei due dadi.

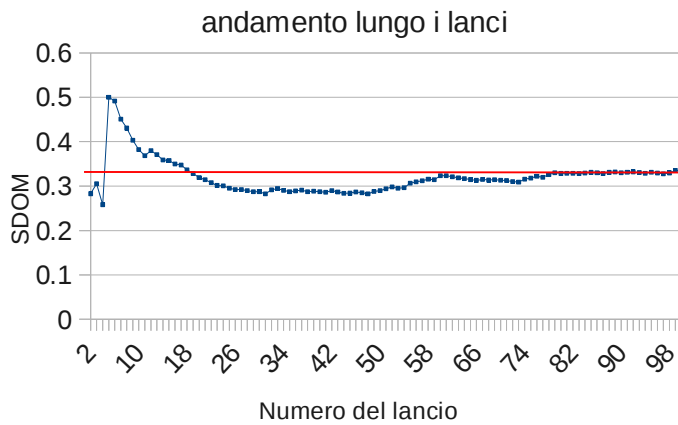
### Valor medio dado 1 + dado 2



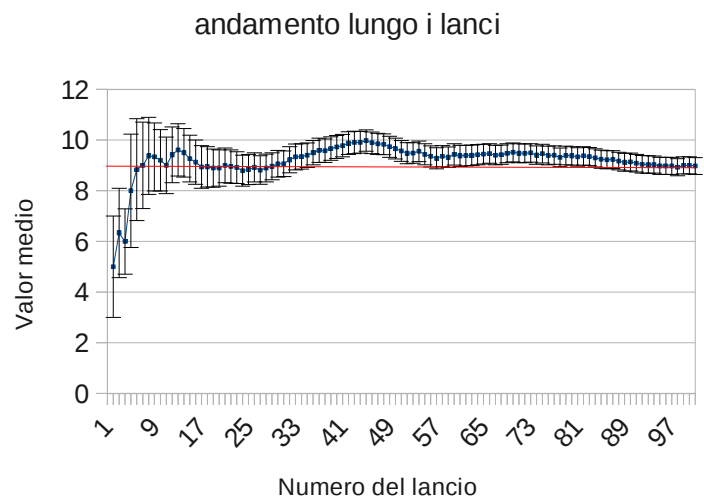
### Deviazione standard dado 1 + dado 2



### SDOM dado 1 + dado 2



### Valor medio dado 1 + dado 2 (con barre d'errore)



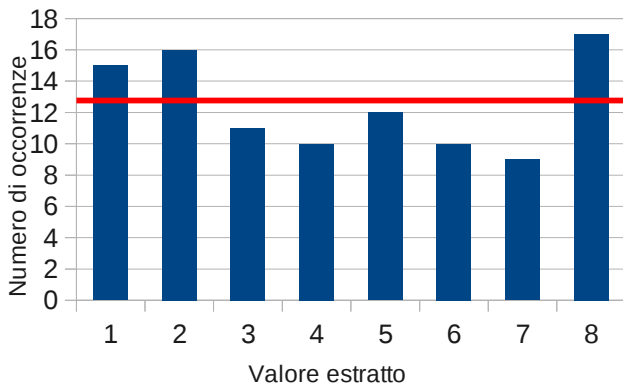
Nei grafici della somma delle estrazioni c'è buona corrispondenza con quanto osservato per i singoli dadi per la stabilizzazione coerente al valore atteso.

In generale il numero di lanci effettuati appare sufficiente ad effettuare una descrizione statistica esaustiva: in ciascun plot dopo un numero di lanci circa pari a 80 non si osservano significative alterazioni degli andamenti.

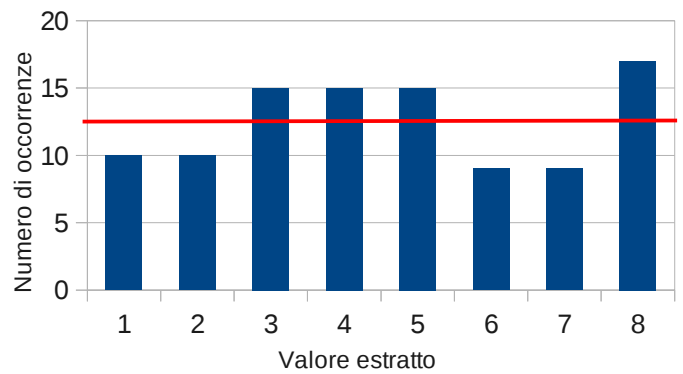
## SCHEDA N° 2 Distribuzioni dei risultati

Si riportano a seguire le distribuzioni dei risultati ottenute per ciascun dado. La linea rossa per le distribuzioni con i singoli dadi rappresenta il valore atteso.

Distribuzione delle estrazioni per il dado 1

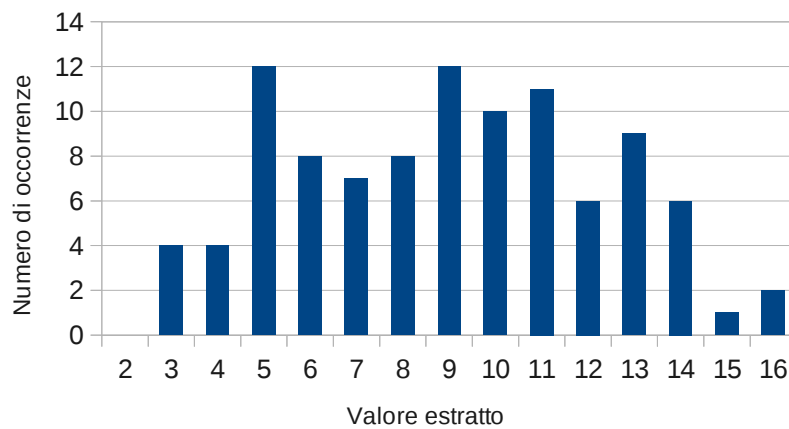


Distribuzione delle estrazioni per il dado 2



Si riporta dunque la distribuzione delle estrazioni effettuate per la somma dei due dadi.

Distribuzione delle estrazioni per il dado 1 + dado 2



Una descrizione statistica per la somma dei dadi che evidenzi la convergenza della distribuzione verso il bacino gaussiano atteso non è ancora evidente con N=100 lanci.

Si riassumono nella successiva tabella gli sviluppi dei conti per il test del  $\chi^2$  nel caso di entrambi i dadi e per la loro somma. Quest'analisi rappresenta un criterio quantitativo valido per testare l'effettiva aleatorietà dei dadi.

Dado 1	valore estratto	$E_k$	$O_k$	$(E_k - O_k)^2/E_k$	$n$ =num intervalli nel test	8
	1	12.5	15	0.5	$c$ =num vincoli	1
	2	12.5	16	0.98	$d$ =num gradi di libertà	7
	3	12.5	11	0.18		
	4	12.5	10	0.5	$\chi^2_{rid} =$	0.75
	5	12.5	12	0.02		
	6	12.5	10	0.5	$P(\chi^2_{rid}) \sim$	0.65
	7	12.5	9	0.98		
	8	12.5	17	1.62		
			$\chi^2$	5.28		
Dado 2	valore estratto	$E_k$	$O_k$	$(E_k - O_k)^2/E_k$	$n$ =num intervalli nel test	8
	1	12.5	10	0.50	$c$ =num vincoli	1
	2	12.5	10	0.50	$d$ =num gradi di libertà	7
	3	12.5	15	0.50		
	4	12.5	15	0.50	$\chi^2_{rid} =$	0.87
	5	12.5	15	0.50		
	6	12.5	9	0.98	$P(\chi^2_{rid}) \sim$	0.51
	7	12.5	9	0.98		
	8	12.5	17	1.62		
			$\chi^2$	6.08		
Dado 1+ 2	valore estratto	$E_k$	$O_k$	$(E_k - O_k)^2/E_k$	$n$ =num intervalli nel test	11
	2	1	0	1.00	$c$ =num vincoli	1
	3	2	4	2.00	$d$ =num gradi di libertà	10
	4	3	4	0.33		
	2, 3, 4	6	8	0.67		
	5	4	12	16.00	$\chi^2_{rid} =$	3.42
	6	5	8	1.80		
	7	6	7	0.17	$P(\chi^2_{rid}) \sim$	0
	8	7	8	0.14		
	9	8	12	2.00		
	10	7	10	1.29		
	11	6	11	4.17		
	12	5	6	0.20		
	13	4	9	6.25		
	14	3	6	3.00		
	15	2	1	0.50		
	16	1	2	1.00		
	14, 15, 16	6	9	1.50		
			$\chi^2$	34.18		

Il valore  $P(\chi^2_{rid})$  riportato sopra rappresenta la probabilità di ottenere un valore di  $\chi^2_{rid}$  grande quanto quello ottenuto. Nel caso delle distribuzioni dei singoli dadi, il valore ottenuto per questa probabilità permette di non rigettare l'ipotesi di distribuzione attesa; nel caso invece della distribuzione attesa per la somma, quest'ultima deve essere rigettata. L'anomalia riscontrata nel numero di esiti eccessivamente alto per il valore 5 nelle somme porta a sospettare che i dadi siano truccati in modo tale da determinare un'estrazione ricorrente dei propri valori bassi, oppure che sperimentalmente nelle varie estrazioni i dadi non sono stati rimescolati in modo sufficiente a ristabilire ad ogni lancio una realistica aleatorietà nelle uscite, introducendo pertanto un errore di natura sistematica nelle misure.