

Seconda quantizzazione - fermioni

1. Si definisce lo stato senza particelle presenti come $|-\rangle$.

Si definisce anche una base di stati di particella singola identici - lieti di un indice α . Lo stato senza particelle ha occupazione nulla su ogni stato α .

$$|-\rangle = | \dots 0_\alpha \dots 0_\beta \dots \rangle$$

L'operatore di creazione a_α^+ crea una particella sullo stato α ,

$$a_\alpha^+ |-\rangle = | \dots 1_\alpha \dots 0_\beta \dots \rangle \equiv |\alpha\rangle$$

Analogamente l'operatore di distruzione, o annichilazione, è definito da

$$a_\alpha |\alpha\rangle = |-\rangle$$

Naturalmente $a_\alpha^+ |\alpha\rangle = 0$ e $a_\alpha |-\rangle = 0$ (la prima equazione è dovuta al principio di Pauli).

2. Con due particelle è chiaro che gli stati

$$a_\alpha^+ a_\beta^+ |-\rangle = |\alpha\beta\rangle$$

e

$$a_\beta^+ a_\alpha^+ |-\rangle = |\beta\alpha\rangle$$

devono essere equivalenti, ovvero legati da una fase. Per fermioni la funzione d'onda deve essere antisimmetrica. Dato che $|\alpha\beta\rangle$ significa $\varphi_\alpha(z_1)\varphi_\beta(z_2)$ e così per $|\beta\alpha\rangle$, se ne deduce

$$|\alpha\beta\rangle = -|\beta\alpha\rangle \Rightarrow a_\alpha^+ a_\beta^+ = -a_\beta^+ a_\alpha^+$$

$$\Rightarrow \boxed{\{a_\alpha^+ a_\beta^+\} = 0}$$

e passando agli op. hermitiani, $\boxed{\{a_\alpha, a_\beta\} = 0}$

Vali anche $\boxed{\{a_\alpha^+, a_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}}$ (dimostralo!)

prodotti di operatori di creazione ed annichilazione. Nel caso di due operatori questo è sempre

$$\langle - | a_\alpha^\dagger a_\beta | - \rangle = 0$$

$$\langle - | a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger | - \rangle = 0$$

$$\langle - | a_\alpha a_\beta | - \rangle = 0$$

$$\langle - | a_\alpha a_\beta^\dagger | - \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

Questi valori vengono nel seguito indicati come "contrazioni",

$$\overline{AB} = \langle - | AB | - \rangle$$

Una definizione formale di contrazione è la seguente. Dati n operatori di fermioni, si definisce "prodotto normalmente ordinato" quello in cui tutti gli operatori di creazione sono a sinistra di quelli di annichilazione ed è stato introdotto un segno $(-)^P$, dove P è il numero degli scambi richiesti.

Allora

$$\overline{AB} = AB - N(AB)$$

$$\Rightarrow AB = N(AB) + \overline{AB}$$

È facile vedere che

$$a_\alpha^\dagger a_\beta = N(a_\alpha^\dagger a_\beta) + \overline{a_\alpha^\dagger a_\beta} \quad \text{con} \quad \overline{a_\alpha^\dagger a_\beta} = 0$$

$$a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger = N(a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger) + \overline{a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger} \quad \text{con} \quad \overline{a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger} = 0$$

$$a_\alpha a_\beta = N(a_\alpha a_\beta) + \overline{a_\alpha a_\beta} \quad \text{con} \quad \overline{a_\alpha a_\beta} = 0$$

$$\begin{aligned} a_\alpha a_\beta^\dagger &= N(a_\alpha a_\beta^\dagger) + \overline{a_\alpha a_\beta^\dagger} \\ &= -a_\beta^\dagger a_\alpha + \overline{a_\alpha a_\beta^\dagger} \quad \text{con} \quad \overline{a_\alpha a_\beta^\dagger} = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Nel caso di n operatori, o più, il calcolo è sempre finito dal TEOREMA di WICK.

Il lemma di Wick afferma che

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} \dots Z &= N(A \dots Z) + N(C \dots Z) \overline{AB} \\
 &+ \text{contrazioni fra tutte le altre coppie} + N(E \dots Z) \times \\
 &\times \overline{AB} \overline{CD} + \text{contrazioni di 4 operatori a 2 a 2} + \dots \\
 &+ \overline{AB} \overline{CD} \overline{EF} \dots + \text{permutazioni}
 \end{aligned}$$

Dimostrazione

La dimostrazione è per induzione. Supponiamo già che l'enumerazione vale per due operatori (per definizione!).

Supponiamo che valga per $n-2$ operatori. Si può dimostrare che vale per n (pari). La dimostrazione è ripetibile sui resti in - dicati. (cf. e.g., ch. 2. p. 11)

Sebbene il lemma di Wick sia un'identità di operatori, viene utilizzato per calcolare valori di aspettazione in $\langle - | \dots | - \rangle$.

In questo caso tutti i prodotti normalmente ordinati danno risultato nullo, e il valore $\langle - | A \dots Z | - \rangle$ è il valore delle contrazioni.

SI DEVE CONTARE IL SEGNO $(-)^n$, DOVE n È IL NUMERO DI SCAMBI.

Esempio

$$\langle - | a_\alpha : a_\beta^+ a_\gamma : a_\delta^+ | - \rangle$$

Le contrazioni che danno risultato non nullo sono $a a^+$

Una possibilità è

$$\langle - | \overbrace{a_\alpha : a_\beta^+ a_\gamma : a_\delta^+} | - \rangle = \delta(\alpha\beta) \delta(\gamma\delta)$$

Però non devo effettuare scambi di operatori, il segno è +.

Se non posso effettuare contrazioni tra gli operatori all'interno di : : , questa è l'unica possibilità, dunque il risultato è

finale.

2 Supponiamo un di calcolo

$$\langle - | a_a a_b a_c^+ a_d^+ | - \rangle$$

Le combinazioni possibili sono

$$\langle - | \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline a_a & a_b & a_c^+ & a_d^+ \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} | - \rangle = \delta(a_d) \delta(b_c) - \delta(a_c) \delta(b_d)$$

Il risultato tiene conto degli scambi necessari a porre gli operatori in ordine.