

Equazione di stato della materia nucleare simmetrica con interazioni di Skyrme (semplificate)

Si consideri una forza efficace del tipo Skyrme con i soli
termini non dipendenti dal momento.

$$V = t_0 \delta(r_1 - r_2) (1 + x_0 \rho \sigma) + \frac{t_3}{6} \delta(r_1 - r_2) \rho^2 (1 + x_3 \rho \sigma)$$

La parte interna di un nucleo $N=2$ "può" conside-
rarsi come un "pezzo" di materia uniforme con $\rho_n = \rho_p =$

$$\frac{\rho}{2}$$

Calcoliamo la corrispondente $E_{\text{HF}} = \langle T \rangle + \langle V \rangle$

$$\langle T \rangle = \sum_i \langle i | \hat{T} | i \rangle$$

Se la materia è confinata in un volume Ω ,

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \sum_i \rightarrow \frac{g\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k, \quad g=4$$

$$\langle T \rangle = \frac{\Omega}{8\pi^3} \int \frac{1}{\Omega} \int d^3k \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$= \frac{1}{2\pi^3} \int 4\pi k^2 dk \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Omega = \frac{2}{\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{K_F^5}{5} \Omega$$

Esprimiamo in funzione di ρ

$$\rho = \frac{1}{\Omega} \sum_i 1 = \frac{4}{8\pi^3} \int d^3k = \frac{2}{\pi^2} \frac{K_F^3}{3}$$

$$\Rightarrow K_F = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{1/3}$$

Dunque in termini di K_F l'energia cinetica per particella

$$\frac{E}{A} = \frac{T}{\Omega \rho} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} K_F^2 = \frac{3}{5} E_F$$

e in termini di ρ

$$\frac{T}{A} = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho \quad (1)$$

Passiamo al calcolo dell'energia potenziale

Sono necessari gli elementi di matrice antisimmetrizzati, ovvero

$$V_{12} = V_{12} = V(1 - P_{12})$$

$$P_{12} = P_2 P_\sigma P_z = P_\sigma P_z \quad (P_z = 1)$$

$$\begin{aligned} V(1 - P_{12}) &= t_0 \delta(r_1 - r_2) (1 - P_\sigma P_z) (1 + x_0 P_\sigma) = \\ &= t_0 \delta(r_1 - r_2) (1 + x_0 P_\sigma - x_0 P_z - P_\sigma P_z) = \\ &= t_0 \delta(r_1 - r_2) \left(1 + x_0 \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} - x_0 \frac{1 + \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2}{2} - \frac{1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \frac{1 + \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2}{2} \right) \\ &= t_0 \delta(r_1 - r_2) \left(\frac{3}{4} + \frac{x_0}{2} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{x_0}{2} \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 - \frac{1}{2} \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 - \frac{1}{4} \sigma_1 \sigma_2 \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \right) \end{aligned}$$

e analogamente per il termine in t_3

Quando si somma su ij se la materia è simmetrica in spin e isospin i termini in $\sigma_1 \sigma_2$ e $\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2$ non contribuiscono (!)

Quindi

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij | \frac{3}{4} t_0 \delta(r_1 - r_2) | ij \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{4\pi^6} \frac{1}{\Omega^2} \int \frac{d^3 k}{\Omega} \frac{d^3 k'}{\Omega} \int \frac{d^3 r_1}{\Omega} \frac{d^3 r_2}{\Omega} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{3}{4} t_0 \delta(n_1 - n_2) e^{in_1} e^{in_2} = \\
 & = \frac{3t_0}{32\pi^6} \Omega \cdot 16\pi^2 \left(\frac{1}{3} k \frac{1}{3} k' k^2 k'^2 \right) = \\
 & = \frac{3t_0}{2\pi^4} \Omega \left(\frac{k_F^3}{3} \right)^2 = \frac{3t_0}{2\pi^4} \Omega \frac{9\pi^4 \rho^2}{9 \cdot 4} = \frac{3t_0}{8} \Omega \rho^2
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{V}{A} = \frac{V}{\Omega \rho} = \frac{3}{8} t_0 \rho \quad (2)$$

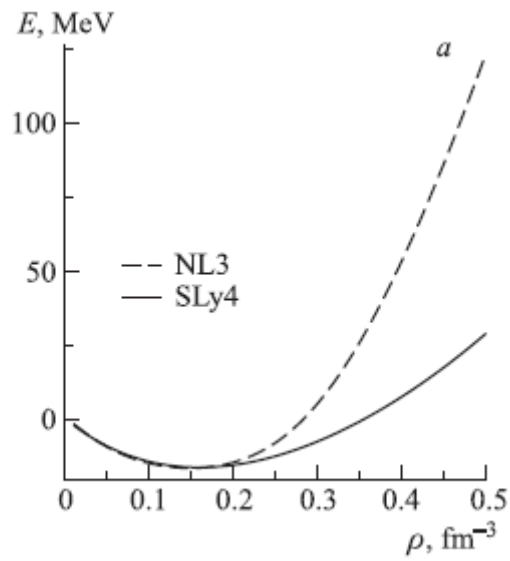
e analogamente il contributo dalla parte t_3 è

$$\frac{V}{A} = \frac{1}{16} t_3 \rho^{\alpha+1} \quad (3)$$

La somma di (1), (2) e (3) dà

$$\boxed{
 \frac{E}{A} = C \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} + \frac{3}{8} t_0 \rho + \frac{1}{16} t_3 \rho^{\alpha+1}
 }$$

L'equazione presentata sopra corrisponde all'equazione di stato della materia nucleare simmetrica. Una rappresentazione è fornita nella seguente figura:



Il punto di minimo è a densità 0.16 fm^{-3} , e a circa -16 MeV . In realtà questi sono dati empirici della materia nucleare (i numeri corrispondono alla densità all'interno dei nuclei e alla parte di volume della formula di massa). Le interazioni efficaci sono fittate per dare questi valori.