

Reazioni a bassa energia

Consideriamo l'andamento della sezione d'urto totale (cioè, integrata sugli angoli) ad energie dell'ordine del MeV. A titolo di esempio, in figura vi è il caso $^{16}\text{O} + n$. La

caratteristica principale del grafico sono le RISONANZE (su un fondo che tende a decrescere). In effetti a aspettiamo che quando l'energia del neutrone lo porta a trovarsi su un livello eccitato di ^{17}O , la σ

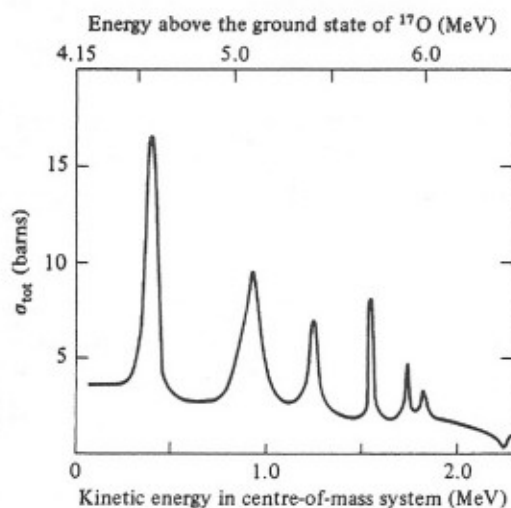


Fig. 8.1 The total cross-section for neutrons interacting with ^{16}O as a function of centre-of-mass energy, showing resonances that correspond to the formation of excited states of ^{17}O (top scale: see also Fig. 7.3). (Data from Garber, D. I. & Kinsey, R. R. (1976), *Neutron Cross Sections*, vol. II, Upton, New York: Brookhaven National Laboratory.)

WA Cottingham, DA Greenwood - AN INTRODUCTION TO NUCLEAR PHYSICS

di $^{16}\text{O} + n \rightarrow ^{17}\text{O}^*$ ha un picco. Se T_n è l'energia cinetica del neutrone incidente, e E_x l'energia di eccitazione dell' ^{17}O , il bilancio energetico dà

$$T_n + BE(^{16}\text{O}) = E_x + BE(^{17}\text{O})$$

$$E_x = T_n + BE(^{17}\text{O}) - BE(^{16}\text{O}) \approx T_n + 4.15 \text{ MeV}$$

Nella scala superiore della Fig 8.1 si legge E_x . Il primo picco è a 4.56 MeV. Tra gli stati eccitati di ^{17}O c'è un $3/2^-$ a quell'energia. (Esercizio: si può interpretare in maniera semplice questo stato come configurazione di modello a shell? È possibile identificare gli altri stati?)

Ci proponiamo ora di spiegare la forma di momento della cur-

va.

Nel caso del passo a 4.56 MeV di E_x , la lunghezza $\lambda =$

$$0.04 \text{ nm} \quad \text{La vita media } \tau = \frac{1}{\Gamma} \sim 10^{-22} \text{ s}$$

$$\text{Il tempo di transito del } m \text{ e'}$$

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{R}{c} \sqrt{\frac{2\Gamma}{mc^2}} \approx \frac{3 \text{ fm}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 10^{-22} \text{ s}$$

$$\sim 3 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

Lo stato si forma in una scala di tempo simile a quella della collisione Nr , e vive molto a lungo.

Abbiamo visto che la forma della perturbazione dipende da t .

Sappriamo che sia:

- 1. lo stato di moto relativo $m + 0$
- 0. lo stato eccitato del 0
- \neq lo stato finale in cui decade 0^*

Chiamiamo a la ampiezza. $a_0(0) = 0$, $a_1(0) = 1$.

L'equazione dei assi di meccanica quantistica e'

$$i\hbar \dot{a}_m = \sum_{m \neq n} V_{mn} e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar} \cdot a_n$$

dove V e' la perturbazione. Nel nostro caso V e' R' in keV .

zione $m = 0$, e

$$i\hbar \dot{a}_0 = V_{01} e^{-i(E_1 - E_0)t/\hbar} a_1$$

Come si vede con la scelta di fermarsi al 1° ordine, a_0 e'

piccola e si può $a_0^2 + a_1^2 = 1$, $a_1 \sim 1$.

Abbiamo intrinseco il decadimento e quindi scriviamo

$$i\hbar \dot{a}_0 = V_{01} e^{-i(E_1 - E_0)t/\hbar} - i \frac{\Gamma}{2} a_0 \quad (*)$$

È facile capire che il secondo termine è responsabile del decadimento. Infatti

$$i\hbar \dot{a}_0 = -i \frac{\Gamma}{2} a_0 \quad \text{da cui} \quad a_0 = e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} t} \quad \text{quindi} \quad |a_0|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

Integriamo (*). Tale equazione è equivalente a

$$i\hbar \frac{d}{dt} (a_0 e^{\frac{\Gamma}{2\hbar} t}) = V_{01} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0 + i \frac{\Gamma}{2}) t}$$

quindi

$$i\hbar a_0 e^{\frac{\Gamma}{2\hbar} t} = \int_0^t V_{01} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0 + i \frac{\Gamma}{2}) t'} dt'$$

$$i\hbar a_0 e^{\frac{\Gamma}{2\hbar} t} = \frac{V_{01} \left[e^{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0 + i \frac{\Gamma}{2}) t} - 1 \right]}{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0 + i \frac{\Gamma}{2})}$$

$$a_0 = V_{01} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0) t} - e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} t}}{E_1 - E_0 + i \frac{\Gamma}{2}}$$

Trascurando il secondo termine al numeratore, che tende a 0 al crescere di t ,

$$|a_0|^2 = \frac{|V_{01}|^2}{(E_1 - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Teniamo ora conto del fatto che il processo completo è

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow f$$

Il numero di eventi per unità di t è $R = |a_0(t)|^2 \frac{1}{\tau_f}$.

Trascuriamo i fattori di scala.

$\bar{E}_1 + dE$, o momento tra k e $k + dk$ e'

$$n(E_1) dE = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \frac{dk}{dE} dE$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \hbar v$$

$$\Rightarrow n(E_1) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \frac{1}{\hbar v}$$

Sostituendo n in (1), con $n(E)$ dalla formula precedente

$$\sigma(1 \rightarrow f) = \frac{\Omega}{v} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\hbar} \frac{(2\pi)^3}{\Omega} \frac{1}{4\pi k^2} \frac{1}{\hbar v} \frac{\Gamma(E_1) \Gamma_f}{(E_1 - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$\sigma(1 \rightarrow f) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma(E_1) \Gamma_f}{(E_1 - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Questa formula è detta di Breit-Wigner. Vale, come detto per stati tutti di spin 0. Se lo stato iniziale è fatto da due particelle di spin j_1 e j_2 (nel caso in esame $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 0$) e lo stato finale ha spin j , poiché σ è una somma su stati finali e una media su stati iniziali si può mostrare che

$$\sigma(1 \rightarrow f) = \frac{\pi}{k^2} \frac{(2j+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \frac{\Gamma(E_1) \Gamma_f}{(E_1 - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

(Esercizio
mostrare!)

La sezione d'urto TOTALE è $\sum_f \sigma(1 \rightarrow f)$. Poiché $\sum_f \Gamma_f = \Gamma$,

$$\sigma_{TOT} = \frac{\pi}{k^2} \frac{(2j+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \frac{\Gamma(E_1) \Gamma}{(E_1 - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Questa formula spiega la Fig 1!

Riassumendo:

la formula appena vista spiega i singoli picchi di Fig. 1, e in particolare è funzione di E_1 , cioè dell'energia nel canale di entrata $^{16}O + n$.

La funzione ha la forma di un picco a $E_1 = E_0$ (energia dello stato di $^{17}O^*$), Γ è la larghezza totale mentre $\Gamma(E_1)$ è la larghezza associata al decadimento "all'indietro" $0 \rightarrow 1$ ($^{17}O^* \rightarrow ^{16}O + n$).

Infine il fattore $\frac{\pi}{k^2}$ spiega il fatto che al crescere di E_1 σ tende a decrescere

(si ricorda che $E_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$).

Le risonanze appena viste si manifestano sistematicamente nello scattering di n da tutti i nuclei ($A \geq 4$) se $E_1 \approx \text{neV}$. Al crescere di A ci si aspetta che il numero di risonanze in un dato intervallo di energia cresca.

Stadiamo il comportamento della σ se $E_1 \rightarrow 0$ o $k \rightarrow 0$.

$\Gamma(E_1)$ dalla regola d'oro (p. 34) è $\sim n(E_1) \sim \frac{k^2}{v} \sim k$;

quindi $\sigma_{\text{tot}} \sim \frac{1}{k^2} \cdot k \cdot \frac{\Gamma}{E_1^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

Questo andamento $\sim \frac{1}{k}$ è confermato sperimentalmente.

Lo svantaggio di questa trattazione è di essere valido solo per n perché la presenza della barriera Coulombiana non è stata considerata.