Calcolo di $\langle BCS | V | BCS \rangle$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_3 k_4}} \bar{V}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \langle BCS | a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} a_{k_4} a_{k_3} | BCS \rangle$$

Fissati k, k', definisco $|\psi\rangle \equiv \prod_{k''(\neq k,k')} (u_{k''} + v_{k''} a^\dagger_{k''} a^\dagger_{\tilde{k}''}) |-\rangle$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_3 k_4}} \langle \psi | (u_k + v_k a_{\tilde{k}} a_k)(u_{k'} + v_{k'} a_{\tilde{k}'} a_{k'}) \times$$

$$\times a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} a_{k_4} a_{k_3} (u_{k'} + v_{k'} a^\dagger_{k'} a^\dagger_{\tilde{k}'})(u_k + v_k a^\dagger_k a^\dagger_{\tilde{k}}) |\psi\rangle$$

Definiamo φ_{00} lo stato senza coppie in k e k', φ_{10} lo stato con una coppia in k e nessuna in k' ecc

$$\Rightarrow (u_k + v_k a^\dagger_k a^\dagger_{\tilde{k}})(u_{k'} + v_{k'} a^\dagger_{k'} a^\dagger_{\tilde{k}'}) |\psi\rangle =$$

$$= u_k u_{k'} \varphi_{00} + u_k v_{k'} \varphi_{01} + v_k u_{k'} \varphi_{10} + v_k v_{k'} \varphi_{11}$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ k_3 k_4}} \bar{V}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \times \langle u_k u_{k'} \varphi_{00} + u_k v_{k'} \varphi_{01} + v_k u_{k'} \varphi_{10} +$$

$$+ v_k v_{k'} \varphi_{11} \, | \, a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} a_{k_4} a_{k_3} | \, u_k u_{k'} \varphi_{00} + u_k v_{k'} \varphi_{01} + v_k u_{k'} \varphi_{10} +$$

$$+ v_k v_{k'} \varphi_{11} \rangle$$

Nel valore di aspettazione i termini in φ_{00} danno chiaramente 0. I termini in φ_{11} danno
$\frac{1}{2} \sum_{kk'} v_k^2 v_{k'}^2$ e i termini in φ_{01} e φ_{10} danno

$$\sum_{kk'>0} \bar{V}_{k \tilde{k} k' \tilde{k}'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$