

Teoria tridimensionale del Quantum Free Electron Laser

Mary Manuela Cola (Post Doc), Dipartimento di Fisica-Milano

Nicola Piovella, Dipartimento di Fisica and INFN-Milano

Luca Volpe (PhD student), Dipartimento di Fisica-Milano

Rodolfo Bonifacio, CBPF-Brasil, INFN-Milano

Angelo Schiavi, Università La Sapienza, Roma

Free Electron Laser (FEL) ad alto guadagno

Electron source
and accelerator

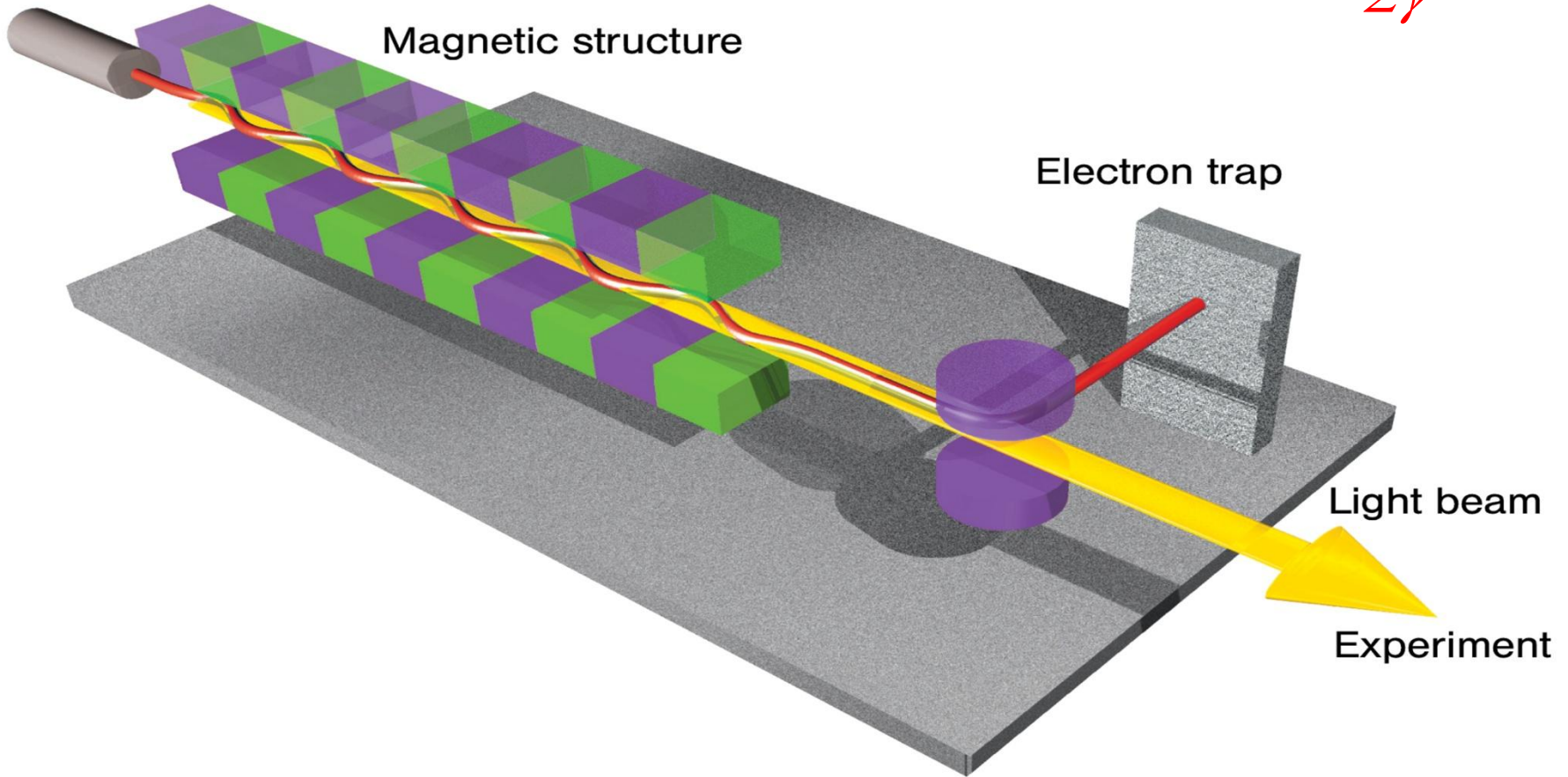
Magnetic structure

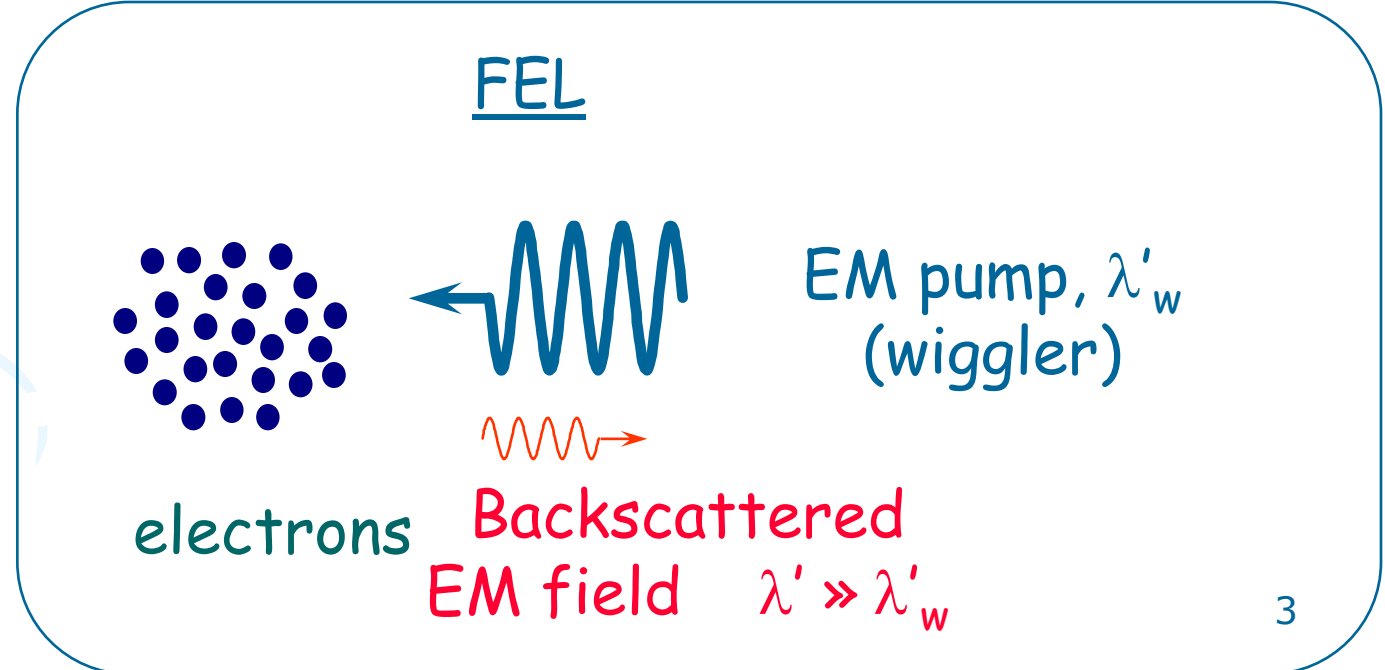
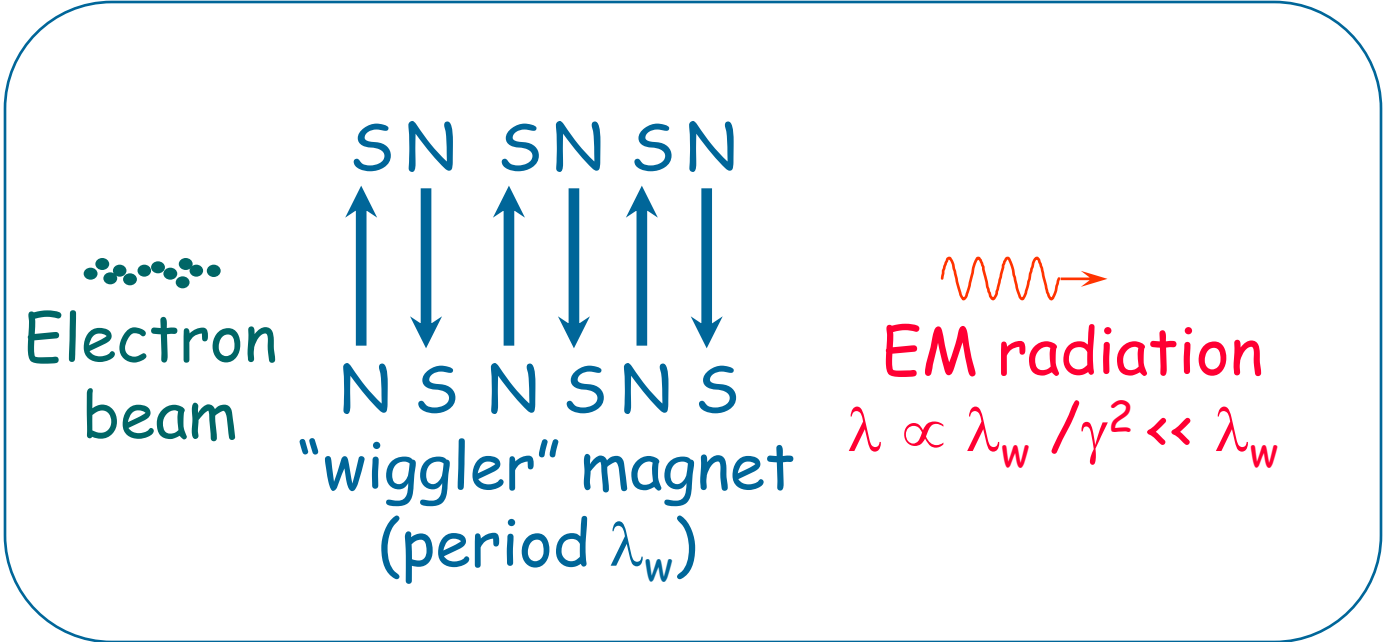
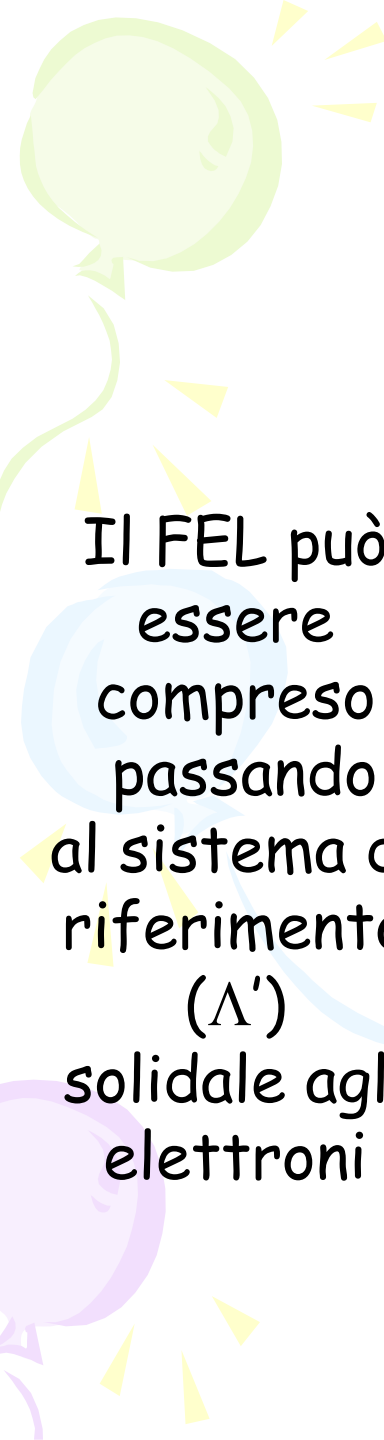
Electron trap

Light beam

Experiment

$$\lambda_r \approx \frac{\lambda_w}{2\gamma^2}$$



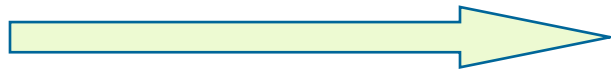


Il FEL può essere compreso passando al sistema di riferimento (Λ') solidale agli elettroni

Caratteristiche Principali

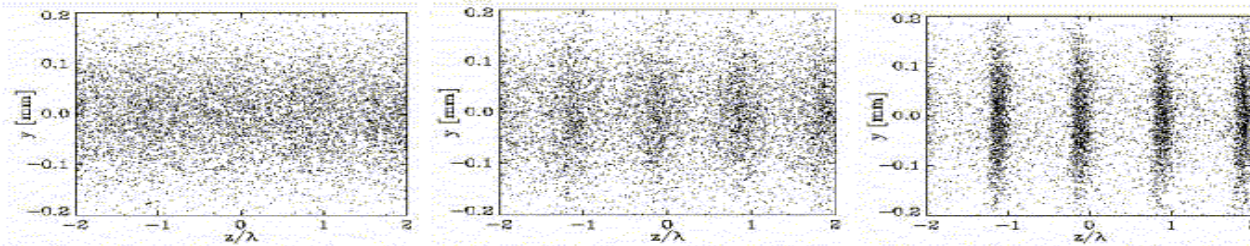
- Crescita esponenziale dell'intensità della radiazione emessa e del bunching
- Partenza da rumore
- Saturazione ($P_{\text{rad}} \sim \rho P_{\text{beam}}$) dopo molte L_g

$b \sim 0$



$b \sim 0.8$

bunching:



$$b = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j}$$

Lunghezza del wiggler (molte L_g)

Perché "Quantum" FEL ?

La transizione dal regime classico al regime quantistico è controllata dal parametro

$$\bar{\rho} = \rho \frac{mc\gamma}{\hbar k} = \frac{\sigma(p_z)}{\hbar k}$$

Massimo spread del momento

Momento di rinculo del fotone

parametro FEL

classico

(misura l'"efficienza")

$$\begin{array}{c} \text{-----} n \hbar k \\ \hbar k \downarrow \\ \text{-----} (n-1) \hbar k \end{array}$$

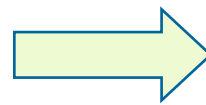
Regime classico

$$\bar{\rho} \gg 1$$

molte righe di emissione

Regime Quantistico

$$\bar{\rho} \leq 1$$



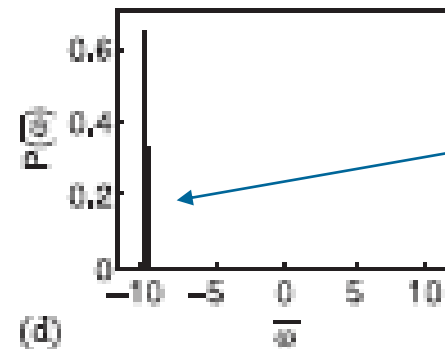
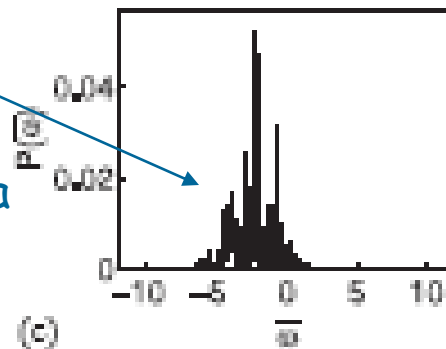
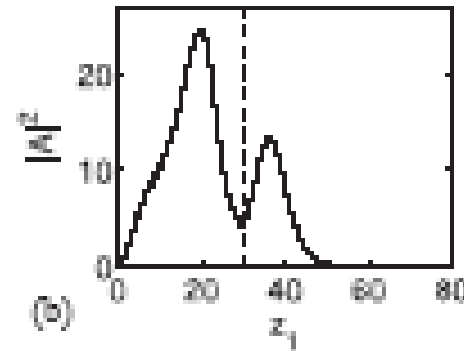
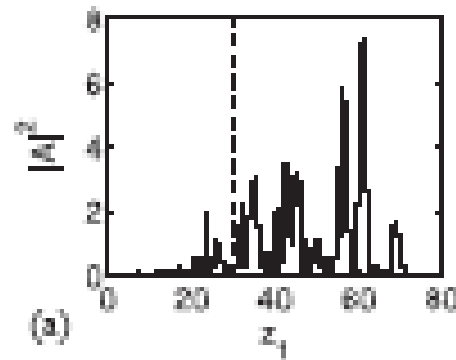
$$\sigma(p_z) = \hbar k$$

È emessa una singola frequenza!

Simulazioni di SASE classica e quantistica

regime classico $\bar{\rho}=5$

regime quantistico $\bar{\rho}=0.1$



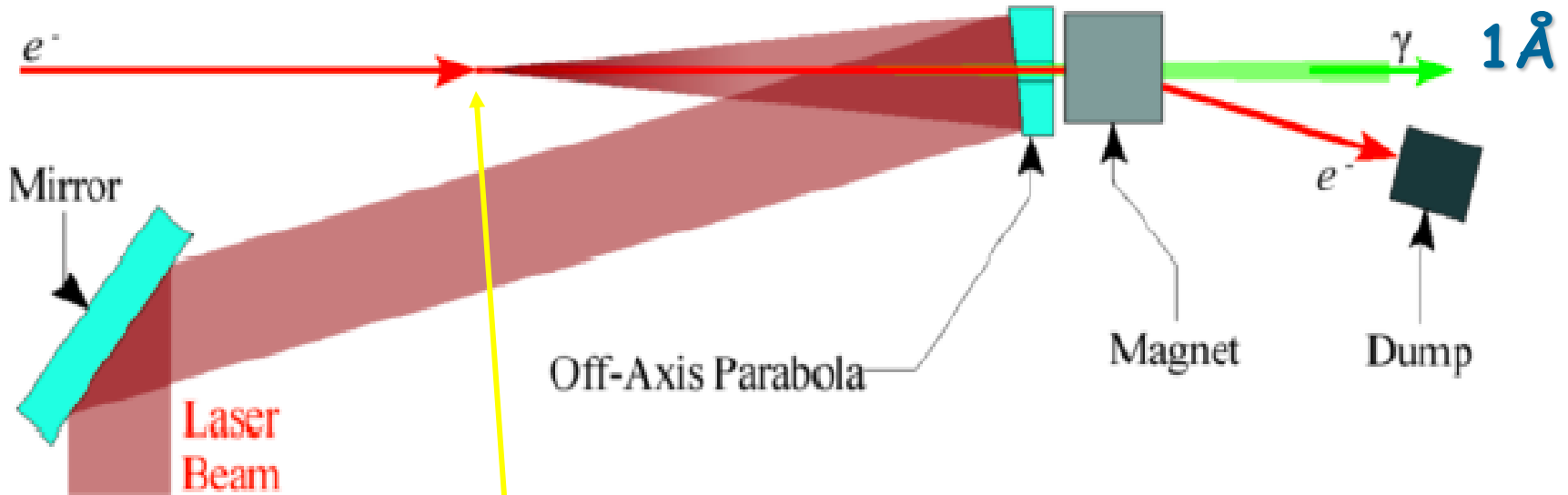
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 2\rho$$

molte spikes sotto la curva di guadagno
 $\approx 2\pi(L_b/L_c)$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\lambda}{L_b}$$

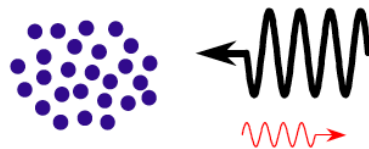
Solo una spike!

Laser wiggler: QFEL



NB

Per QFEL con un wiggler magnetico ci vorrebbe un wiggler troppo lungo



1D QFEL MODEL i)

(Bonifacio, Casagrande 1984)

equazioni per le
singole particelle

$$\frac{d\theta_j}{d\bar{z}} = \frac{p_j}{\bar{\rho}} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\frac{dp_j}{d\bar{z}} = -\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{N_e}} (ae^{i\theta_j} + \text{h.c.}) = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}$$

$$\frac{da}{d\bar{z}} = \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{N_e}} \sum_{j=1}^N e^{-i\theta_j} + i\delta a$$

Hamiltoniana

$$[\theta_i, p_j] = i\delta_{ij}$$

$$[a, a^+] = 1$$

$$H(\theta, p) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{p_j^2}{2\bar{\rho}} - i\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{N_e}} (ae^{i\theta_j} - \text{h.c.}) \right\} - \delta a^+ a$$

Variabili e parametri fondamentali

$$p = \frac{mc(\gamma - \gamma_0)}{\hbar k} \quad \text{Momento longitudinale in unità del momento dei fotoni emessi}$$

$$\mathcal{S} = (\mathbf{k}_r + \mathbf{k}_L)z - (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_L)ct \quad \text{Fase degli elettroni}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{L_g} \quad \text{Posizione lungo il wiggler in unità di lunghezze di guadagno}$$

$$L_g = \frac{\lambda_L}{8\pi\rho} \quad \text{Lunghezza di guadagno}$$

$$\delta = \frac{\gamma_0 - \gamma_r}{\rho\gamma_r} \quad \text{detuning} \quad \gamma_0, \gamma_r \quad \text{energia iniziale e di risonanza degli elettroni in unità } mc^2$$

1D QFEL MODEL ii)

analogia con CARL

N particelle descritte da un campo di materia $\hat{\Psi}(\theta, \bar{z})$

$$[\hat{\Psi}(\theta), \hat{\Psi}(\theta')^+] = \delta(\theta - \theta') \quad \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\Psi}(\theta)^+ \hat{\Psi}(\theta) = \hat{N}$$

$$\hat{H}^{\text{II}} = \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\Psi}(\theta)^+ H(\theta, -i\partial_\theta, a, a^+) \hat{\Psi}(\theta)$$

$$i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2\bar{\rho}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \theta^2} - i \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{N_e}} (a e^{i\theta} - \text{c.c.}) \hat{\Psi}$$

$$\frac{d\hat{a}}{d\bar{z}} = \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{N_e}} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\Psi}(\theta)^+ e^{-i\theta} \hat{\Psi}(\theta) + i\delta\hat{a}$$

Gli elettroni sono trattati come bosoni??

Preparata Hypothesis

$$N_e \rightarrow \infty \quad \hat{\psi} \approx \sqrt{N_e} \psi \quad \text{e} \quad \hat{a} \approx \sqrt{\bar{\rho} N_e} A$$

Cioè \hat{a} e $\hat{\psi}$ sono campi "classici"
ed usiamo per gli elettroni un'eq. di Schrödinger non lineare
tipo "Gross-Pitaevskii"

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2\bar{\rho}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - i\bar{\rho} \left\{ A(z_1, \bar{z}) e^{i\theta} - \text{c.c.} \right\} \Psi$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} = \int_0^{2\pi} d\theta | \Psi(\theta, z_1, \bar{z}) |^2 e^{-i\theta} + i\delta A$$

La propagazione (slippage) è stata inclusa tramite
un approccio a scale multiple

Variabili e parametri fondamentali

$$p = \frac{mc(\gamma - \gamma_0)}{\hbar k} \quad \text{Momento longitudinale in unità del momento dei fotoni emessi}$$

$$\mathcal{S} = (\mathbf{k}_r + \mathbf{k}_L)z - (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_L)ct \quad \text{Fase degli elettroni}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{L_g} \quad \text{Posizione lungo il wiggler in unità di lunghezze di guadagno}$$

$$L_g = \frac{\lambda_L}{8\pi\rho} \quad \text{Lunghezza di guadagno} \quad L_c = \frac{\lambda_r}{4\pi\rho} \quad \text{Lunghezza di cooperazione}$$

$$\delta = \frac{\gamma_0 - \gamma_r}{\rho\gamma_r} \quad \text{detuning} \quad \gamma_0, \gamma_r \quad \text{energia iniziale e di risonanza degli elettroni in unità } mc^2$$

$$z_1 = \frac{z - v_r t}{\beta_r L_c} \quad \text{posizione lungo il fascio di elettroni} \quad v_r = c\beta_r \quad \text{velocità di risonanza}$$

Rappresentazione dei Momenti (working equations)

Ψ è periodica in θ :
$$\Psi(\theta, z_1, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z_1, \bar{z}) e^{in(\theta + \delta\bar{z})}$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial \bar{z}} = -i \left(\frac{n^2}{2\bar{\rho}} + n\delta \right) c_n - \bar{\rho} \left\{ A c_{n-1} - A^* c_{n+1} \right\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{n-1}^*$$

$|c_n|^2 =$ probabilità di trovare un elettrone con $p=n(\hbar k)$ in z

$$b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n c_{n-1}^*$$

bunching

Estensione al 3D?

$\Psi(\theta) \rightarrow \Psi(\theta, x, y)$? NO, perché descrive un fascio freddo con emittanza trasversale **quantistica** $\hat{\lambda}_{\text{Compton}}$

Ma nei fasci attualmente

$$\alpha = \frac{\hat{\lambda}_{\text{Compton}}}{\epsilon_n} \rightarrow 0$$

L'emittanza trasversale ci dice lo spread in momento degli elettroni nelle dimensione trasversale

Il moto longitudinale è **quantizzato** ma il moto trasverso è essenzialmente **classico**

Modello Wigner 1D

- Assumiamo uno stato misto descritto da un operatore densità ρ
- Poiché θ è una variabile angolare in $(0, 2\pi]$, il momento longitudinale è discreto ($p=n$) quindi la funzione di Wigner dev'essere discreta:

$$W_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta' e^{-2in\theta'} \langle \theta + \theta' | \hat{\rho} | \theta - \theta' \rangle = w_n(\theta) + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \text{sinc}[(n - n' - 1/2)\pi] w_{n'+1/2}(\theta)$$

Per definire la funzione di Wigner c'è bisogno di due funzioni di Wigner 'small', con indice **intero e semintero**

$$w_s(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' e^{-2is\theta'} \langle \theta + \theta' | \hat{\rho} | \theta - \theta' \rangle \quad (s=m \text{ or } s=m+1/2)$$

[J.P. Bizarro, PRA 49 3255 (1994)]

Modello Wigner 1D

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + \frac{s}{\bar{\rho}} \frac{\partial w_s}{\partial \theta} - \bar{\rho} (A e^{i\theta} + \text{c.c.}) \{w_{s+1/2} - w_{s-1/2}\} = 0$$

$s=m$ o $s=m+1/2$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-i\theta} w_{n+1/2}(\theta, z_1, \bar{z}) + i\delta A$$

È equivalente alle equazioni per i c_n di uno stato puro con:

$$w_{n+\mu/2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{i(2n'+\mu)\theta} c_{n+n'+\mu}^* c_{n-n'} \quad (\mu=0,1)$$

Le w_n sono legate alle probabilità di occupazione mentre le $w_{n+1/2}$ sono legate alle interferenze tra gli stati e quindi al bunching

LIMITE CLASSICO

per $\bar{\rho} \gg 1$ $\bar{p} = \frac{s}{\rho}$ diventa una variabile **continua**

$$\bar{\rho}(w_{s+1/2} - w_{s-1/2}) \rightarrow \bar{\rho} \left[w \left(\bar{p} + \frac{1}{2\bar{\rho}} \right) - w \left(\bar{p} - \frac{1}{2\bar{\rho}} \right) \right] \rightarrow \frac{\partial w}{\partial \bar{p}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \bar{p} \frac{\partial w}{\partial \theta} - (Ae^{i\theta} + \text{c.c.}) \frac{\partial w}{\partial \bar{p}} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{p} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-i\theta} w(\theta, \bar{p}, z_1, \bar{z}) + i\delta A$$

Equazione di VLASOV
(o 'Liouville')

MODELLO WIGNER 3D

- aggiungiamo le coordinate trasverse alla funzione di wigner e ad A :

$$w_s(\theta, z_1, \bar{z}) \rightarrow w_s(\theta, x, y, p_x, p_y, z_1, \bar{z})$$

$$A(z_1, \bar{z}) \rightarrow A(x, y, z_1, \bar{z})$$

- introduciamo il profilo spaziale del laser $g(x, y, \bar{z})$
- eseguiamo il limite classico $\lambda_{\text{Compton}} \ll \varepsilon_n$ solo sulle coordinate trasverse assumendo come condizione iniziale per il fascio di elettroni uno stato misto con emittanza 'classica' ε_n
- il problema della miscela statistica con l'approccio alla Wigner finisce nella condizione iniziale

DINAMICA 3D

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\bar{\rho}} + \frac{\alpha b}{2} \hat{p}_t^2 + \left\{ \delta + \frac{\xi}{2\rho} (1 - |g|^2) - \frac{bX\alpha^2}{2} |\hat{p}_t|^2 \right\} \hat{p} + i\bar{\rho} (g^* A e^{i\hat{\theta}} - \text{h.c.}) + \frac{\xi}{2\alpha\rho X} |g|^2$$

Estende l'operatore 1D introducendo la dinamica trasversale degli elettroni e la dipendenza spaziale del campo di radiazione e del laser wiggler

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \bar{z}} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$p_x = \frac{mc\gamma_0}{\hbar} \frac{dx}{dz} \quad p_y = \frac{mc\gamma_0}{\hbar} \frac{dy}{dz} \quad p = \frac{mc(\gamma - \gamma_0)}{\hbar k} \quad [\hat{\theta}, \hat{p}] = [\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i$$

$$b = \frac{L_g}{\beta^*} \quad \beta^* = \frac{\gamma\sigma^2}{\varepsilon_n} \quad X = \frac{k\varepsilon_n}{\gamma} \quad \xi = \frac{a_w^2}{1 + a_w^2} \quad \alpha = \frac{\hbar}{mc\varepsilon_n} = \frac{\lambda_c}{\varepsilon_n}$$

estensione della funzione di Wigner al 3D

$$w_s(\theta, \vec{x}_t, \vec{p}_t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' e^{-2i(s\theta' + \vec{p}_t \cdot \vec{x}')} \langle \theta + \theta', \vec{x} + \vec{x}' | \hat{\rho} | \theta - \theta', \vec{x} - \vec{x}' \rangle$$

Con una **procedura standard** si trasforma l'equazione di Liouville per l'operatore densità nell'equazione per la funzione di Wigner

In particolare per una coordinate trasverse (continua)

$$-i[U(\mathbf{x}), \hat{\rho}] \rightarrow i \left\{ U \left(\mathbf{x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \right) - U \left(\mathbf{x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \right) \right\} w_s(\mathbf{x}, p_x)$$

si ottengono delle **serie**:

per le coordinate longitudinali si risommano esattamente grazie alla forma particolare del potenziale FEL

Procedura per il limite classico trasverso...

se x scala come σ e $\frac{dx}{dz}$ scala come ε_r/σ , definiamo:

$$\bar{x} = \frac{x}{\sigma}, \quad \bar{p}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_r} \frac{dx}{dz} = \alpha p_x \quad \bar{x}, \bar{p}_x \approx 1 \quad \text{e ricordiamo} \quad \alpha = \frac{\lambda_{\text{Compton}}}{\varepsilon_n}$$

$$\begin{aligned} & i \left\{ U \left(x + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \right) - U \left(x - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \right) \right\} w_s(x, p_x) \\ &= i \left\{ U \left(\bar{x} + \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_x} \right) - U \left(\bar{x} - \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_x} \right) \right\} w_s(\bar{x}, \bar{p}_x) \\ &\xrightarrow{\lim \alpha \rightarrow 0} \alpha \left(-\frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial w_s}{\partial \bar{p}_x} = \alpha F_{\bar{x}} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{p}_x} \end{aligned}$$

Si ottengono le seguenti equazioni

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + \left\{ \frac{s}{\bar{\rho}} + \delta + \frac{\xi}{2\rho} (1 - |g|^2) - \frac{bX}{2} |\bar{p}_t|^2 \right\} \frac{\partial w_s}{\partial \theta} + b\bar{p}_t \cdot \nabla_{\bar{x}} w_s - \bar{\rho} (g^* A e^{i\theta} + \text{c.c.}) \{w_{s+1/2} - w_{s-1/2}\} - \frac{\xi}{2\rho X} (\nabla_{\bar{x}} |g|^2) \cdot \nabla_{\bar{p}_t} w_s$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} - ia \nabla_{\bar{x}}^2 A = g \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^2 \bar{p}_t \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-i\theta} w_{n+1/2} (\theta, \bar{x}, \bar{p}_t, z_1, \bar{z})$$

$$a = \frac{L_g}{Z_r} = \frac{b}{2X} \quad Z_r = \frac{4\pi\sigma^2}{\lambda}$$

Termini nell'eq. di Wigner

$$\frac{\partial W_s}{\partial \bar{z}} + \dot{\theta} \frac{\partial W_s}{\partial \theta} \dots = 0$$

$$\dot{\theta} = \left\{ \frac{s}{\bar{\rho}} + \delta + \frac{\xi}{2\rho} (1 - |g|^2) - \frac{bX}{2} |\bar{p}_t|^2 \right\}$$

Modifica la risonanza FEL

$$\lambda = \frac{\lambda_L}{4\gamma_0^2} \left[1 + a_w^2 + \gamma_0^2 (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right]$$

detuning longitudinale $\delta = \frac{\gamma_0 - \gamma_r}{\rho\gamma_0}$

fuori risonanza dovuto al profilo del laser

$$\frac{\xi}{2\rho} (1 - |g|^2)$$

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma_0} \right)_{a_w} \approx \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\Delta a_w^2}{1 + a_w^2} \right)$$

fuori risonanza dovuto alla divergenza del fascio

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma_0} \right)_{x',y'} \cong \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\gamma_0^2 \theta_{x,y}^2}{1 + a_w^2} \right)$$

$$- \frac{bX}{2} |\bar{p}_t|^2$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + \dots + \dot{\vec{x}} \cdot \nabla_{\vec{x}} w_s \dots = 0$$

$$\dot{\vec{x}} = b \vec{p}_t$$

Moto trasverso dell'elettrone
(divergenza del fascio)

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + \dots \dot{\vec{p}}_t \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}_t} w_s = 0$$

$$\dot{\vec{p}}_t = -\frac{\xi}{2\rho X} (\vec{\nabla}_{\vec{x}} |g|^2)$$

Forza ponderomotrice dovuta al
profilo trasverso del laser
(defocusing se è convesso)

$$\frac{d\beta_x}{dz} = -\frac{1}{2\gamma_0^2} \frac{\partial a_w^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} + \dots - \bar{\rho} (A e^{i\theta} + \text{c.c.}) \{w_{s+1/2} - w_{s-1/2}\} = 0$$

forza FEL longitudinale
(quantizzata)

Differenza finita!!

FULL CLASSICAL LIMIT

Il modello "Wigner" discreto nel limite classico

$$\bar{\rho} = \rho \frac{mc\gamma_0}{\hbar k} \gg 1$$

diventa un modello "Vlasov" per il FEL classico con un laser wiggler in cui la distribuzione nello spazio delle fasi è una funzione continua

$$W_n(\theta, \bar{x}, \bar{p}_t, z_1, \bar{z}) \rightarrow \bar{\rho} W(\theta, \bar{p}, \bar{x}, \bar{p}_t, z_1, \bar{z}) \quad \text{con} \quad s/\bar{\rho} \rightarrow \bar{p}$$

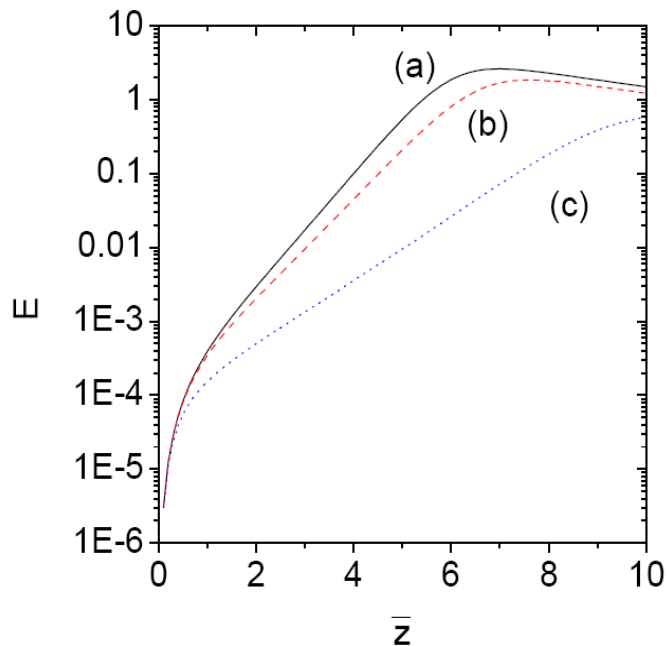
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + \left\{ \bar{p} + \delta + \frac{\xi}{2\rho} (1 - |g|^2) - \frac{bX}{2} |\bar{p}_t|^2 \right\} \frac{\partial W}{\partial \theta} + b\bar{p}_t \cdot \nabla_{\bar{x}} W - (g^* A e^{i\theta} + \text{c.c.}) \frac{\partial W}{\partial \bar{p}} - \frac{\xi}{2\rho X} (\nabla_{\bar{x}} |g|^2) \nabla_{\bar{p}_t} W = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial A}{\partial z_1} - ia \nabla_{\bar{x}}^2 A = g \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \bar{p}_t \int_{-\pi}^{\pi} d\bar{p} \int d\theta e^{-i\theta} W(\theta, \bar{p}, \bar{x}, \bar{p}_t, z_1, \bar{z})$$

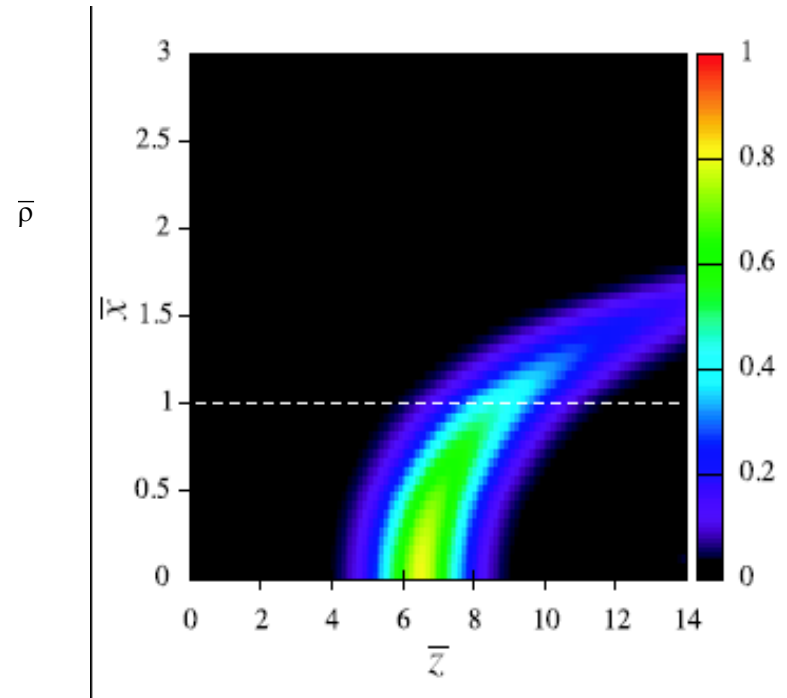
Simulazioni 3D

$\bar{\rho} = 0.2$, $\alpha = 1.6 \times 10^{-4}$, $g = 1$ (laser uniforme)

(a) $b = 0$ ($X = 0$), (b) $b = 0.014$ ($X = 88$), (c) $b = 0.028$ ($X = 176$).



Energia totale irraggiata



Intensità $|A|^2$ della radiazione

CONCLUSIONI

- Abbiamo proposto un nuovo modello 3D per il FEL quantistico con un laser wiggler che tiene conto degli effetti di emittanza trasversa, di diffrazione della radiazione, di propagazione longitudinale e del profilo spaziale del laser wiggler.
- Il moto degli elettroni è descritto da una funzione di Wigner che combina il moto trasverso classico con la dinamica longitudinale quantistica.
- Nel limite $\bar{\rho} \gg 1$ si ottiene un modello Vlasov per un FEL classico con un laser wiggler
- Le prime simulazioni mostrano che l'effetto di perdita di guadagno dovuta all'emittanza non è tale da compromettere l'amplificazione esponenziale della radiazione