

Problemi: calore -transizioni di fase

1. a) Quanto calore occorre per far passare del ghiaccio di massa $m = 720 \text{ g}$ e temperatura di $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ allo stato liquido alla temperatura di $15 \text{ }^\circ\text{C}$?

b) supponete di fornire al ghiaccio un calore totale di solo 210 kJ .
Quali sono lo stato finale e la temperatura dell'acqua finale ?

a) **Idea chiave:**

Divido il processo in 3 stadi:

stadio 1: il ghiaccio non può fondere a T inferiore al punto di congelamento.

Q_1 fornito innalza solo la temperatura da -10 a $0 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$Q_1 = c_{\text{ghiaccio}} m (T_f - T_i) = [2220 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}] (0.720 \text{ kg}) [0^\circ \text{C} - (-10^\circ \text{C})] = 15984 \text{ J} \approx 15.98 \text{ kJ}$$

stadio 2: finchè il ghiaccio non è tutto sciolto la temperatura non cambia:

Q_2 ceduto cambia lo stato della sostanza, da solido a liquido:

$$Q_2 = mL_F = (333 \text{ kJ / kg}) (0.720 \text{ kg}) = 239.8 \text{ kJ}$$

stadio 3: calore Q_3 fornito innalza ora la temperatura acqua, fino a $15 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$Q_3 = c_{\text{acqua}} m (T_f - T_i) = [4190 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}] (0.720 \text{ kg}) [15^\circ \text{C} - (0^\circ \text{C})] = 45252 \text{ J} \approx 42.25 \text{ kJ}$$

Calore Q_{tot} richiesto:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (15.98 + 239.8 + 45.25) \text{ kJ} \approx 300 \text{ kJ}$$

b) Fornendo solo 210 kJ porto il ghiaccio al punto di congelamento (uso 15.98 kJ) e mi resta $Q_{\text{res}} = 210 \text{ kJ} - 15.98 \text{ kJ} = 194 \text{ kJ}$. Non mi basta per fondere **TUTTO** il ghiaccio.

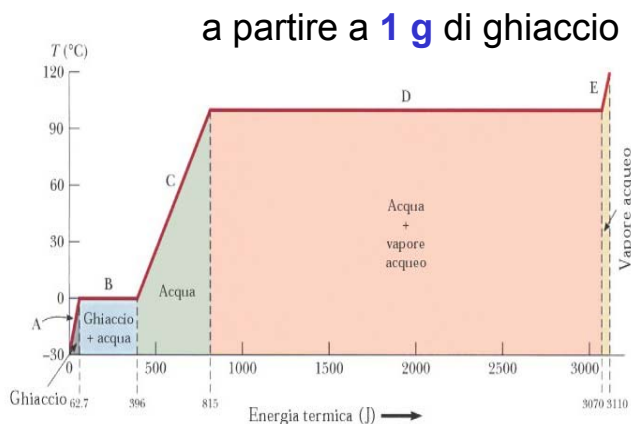
Idea chiave: in fusione incompleta il processo termina a $T = 0^\circ\text{C}$
con miscela di acqua e ghiaccio.

$$m = Q_{\text{res}} / L_F = 194 \text{ kJ} / (333 \text{ kJ/kg}) = 0.583 \text{ kg}$$

$$m_{\text{ghiaccio}} = 720 \text{ g} - 583 \text{ g} = 137 \text{ g}$$

massa di ghiaccio fusa

massa di ghiaccio restante



- 2.** Un ferro di cavallo di **1.5 kg** inizialmente a **600 °C** è lasciato cadere in un secchio contenente **20.0 kg** di acqua a **25.0 °C**. Quale è la temperatura finale ?
[Trascurare il calore specifico del contenitore e assumere che solo piccola parte di acqua vaporizzi]

$$\begin{aligned} \text{N.B. } c_{\text{acqua}} &= 4186 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C}) \\ c_{\text{Fe}} &= 448 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

Il trasferimento di calore procede fino a che il ferro di cavallo e l'acqua arrivano alla stessa temperatura finale T .

L'energia persa dal ferro viene assorbita dall'acqua:

$$Q_{\text{Fe}} + Q_{\text{acqua}} = 0$$

$$m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} (T - 600^\circ\text{C}) + m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} (T - 25^\circ\text{C}) = 0$$

$$T = \frac{m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} (25.0^\circ\text{C}) + m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}} (600^\circ\text{C})}{m_{\text{acqua}} c_{\text{acqua}} + m_{\text{Fe}} c_{\text{Fe}}}$$

$$= \frac{(20.0\text{kg})(4186\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C})(25.0^\circ\text{C}) + (1.50\text{kg})(448\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C})(600^\circ\text{C})}{(20.0\text{kg})(4186\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}) + (1.50\text{kg})(448\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C})} = 29.6^\circ\text{C}$$

N.B. il calore specifico dell'acqua è 10 volte quello del Fe e questo riduce le variazioni di temperatura dell'acqua.

- 3.** Un proiettile di piombo di massa **3.00 g** a **30.0 °C**, alla velocità di **240 m/s**, colpisce un blocco di ghiaccio a **0°C**, rimanendovi conficcato.
Quanto ghiaccio fonde ?

N.B. $c_{\text{acqua}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$
 $c_{\text{pb}} = 128 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$

In un **sistema isolato** tutta l'energia cinetica iniziale e l'energia interna del proiettile si trasformano in energia interna di fusione del ghiaccio, la cui massa si determina dal calore latente di fusione.
Per raggiungere l'equilibrio termico il proiettile deve raffreddarsi a $0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

$$|\Delta K_p| + |Q_p| = Q_{\text{ghiaccio}}$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 + m_p c_{\text{pb}} \Delta T = m_{\text{ghiaccio}} L_f$$

$$m_{\text{ghiaccio}} = m_p \frac{\frac{1}{2} v_p^2 + c_{\text{pb}} \Delta T}{L_f}$$

$$m_{\text{ghiaccio}} = (3.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) \frac{\frac{1}{2} (240 \text{ m/s})^2 + (128 \text{ J/kg}^\circ\text{C})(30.0^\circ\text{C})}{3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}}$$
$$= \frac{86.4 \text{ J} + 11.5 \text{ J}}{3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}} = 2.94 \times 10^{-4} \text{ kg} = 0.294 \text{ g}$$

N.B. la maggior parte dell'energia proviene dall'energia cinetica del proiettile (88%), mentre l'energia interna del proiettile contribuisce solo per 12%.

4. Un adulto **a riposo** di dimensioni medie converte energia chimica del cibo in energia interna al tasso di **120 W**, detto **tasso metabolico basale**.

Per rimanere a temperatura costante, il corpo deve trasferire energia all'esterno con la stessa rapidità. Vi sono vari processi di espulsione di energia dal corpo:

- 1) conduzione termica nell'aria a contatto con la pelle esposta
(senza cappello si forma corrente di convezione verticale che parte dalla testa);
- 2) radiazione elettromagnetica;
- 3) espirazione di aria calda;
- 4) evaporazione nella traspirazione;
- 5) **umidità emessa dall'alito** [caso in questione] !!!

Supponiamo di compiere **22.0** respiri al minuto, ciascuno con un volume **V=0.600 l**.

Assumiamo di inalare aria secca e di emettere aria a **T = 37 °C**, contenente vapore d'acqua con pressione **p = 3.20 kPa**

[**N.B.** il vapore proviene dalla evaporazione del liquido nel corpo]

Si assuma che il vapore sia un gas perfetto e che il suo calore latente di evaporazione a **37 °C** sia lo stesso del suo calore latente di ebollizione a **100 °C**.

Calcolare il tasso al quale si perde energia emettendo aria umida.

We find the quantity of water vapor in one exhaled breath.

$$PV = nRT: \quad n = \frac{PV}{RT} = \frac{(3.20 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(0.600 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.315 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(273 \text{ K} + 37 \text{ K})} = 7.45 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

The molar mass of water (H_2O) is

$$M = (2(1.00) + 16.0) \text{ g/mol} = 0.0180 \text{ kg/mol}$$

The mass of water vapor exhaled in one breath is

$$m_{\text{sample}} = nM = 7.45 \times 10^{-4} \text{ mol}(0.0180 \text{ kg/mol}) = 1.34 \times 10^{-5} \text{ kg}$$

The energy it absorbs from your body in evaporating we estimate as

$$Q = mL = 1.34 \times 10^{-5} \text{ kg}(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 30.3 \text{ J}$$

Your rate is of energy loss is

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{30.3 \text{ J}}{\text{breath}} \left(\frac{22.0 \text{ breath}}{\text{min}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = \boxed{11.1 \text{ W}}$$



Note that a dog does not perspire, but maximizes energy loss through the pathway considered here, by panting.

Cane: contrasta aumento di temperatura non con sudore
ma con aumento frequenza respiratoria !!!

5. Una persona mangia a cena una quantità di cibo pari a **2000 Calorie** di energia. Vuole fare un lavoro equivalente in palestra sollevando un oggetto di **50.0 kg**. Quante volte deve sollevare il peso per spendere tutta questa energia ?
Supporre che l'oggetto venga alzato di **h=2 m** ogni volta.

Idea chiave:

Si vuole trasferire 2000 Calorie di energia dal corpo compiendo lavoro sul sistema oggetto-Terra.

1 Cal = 10^3 cal = 1kcal [unità di misura del contenuto di energia del cibo]

Calcolo il lavoro equivalente in Joule:

$$W = (2.00 \cdot 10^6 \text{ cal})(4.186 \text{ J/cal}) = 8.37 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Il lavoro svolto quando si solleva l'oggetto di altezza h è mgh, quindi il lavoro svolto per sollevare il peso n volte è

$$W = n mgh = 8.37 \cdot 10^6 \text{ J}$$

da cui ricavo

$$n = \frac{W}{mgh} = \frac{8.37 \cdot 10^6 \text{ J}}{(50.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})} = 8.54 \times 10^3 \text{ volte}$$



Se si solleva il peso una volta ogni 5 secondi, il tempo impiegato è :

$$t = n \times 5s = (8.54 \times 10^3) \times 5s = 42.7 \times 10^3 s = \frac{42.7 \times 10^3}{3600} h \approx 12h$$

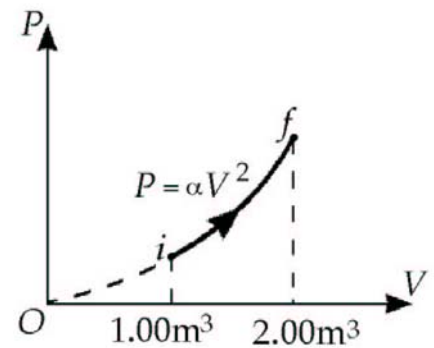
Problemi: lavoro nelle trasformazioni termodinamiche

6. Un gas ideale si espande al doppio del suo volume iniziale $V_i = 1 \text{ m}^3$, in una trasformazione quasi-statica, in cui $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00 \text{ atm/m}^6$, come mostrato in figura.
Quanto lavoro compie il gas nell'espansione ?

Idea chiave:

Il lavoro fatto dal gas nell'espansione è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV, valutata fra gli stati iniziale e finale:

$$\begin{aligned} W_{if} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV \\ &= \int_{V_i}^{V_f} \alpha V^2 dV \\ &= \frac{1}{3} \alpha [V^3]_{V_i}^{V_f} = \frac{1}{3} \alpha (V_f^3 - V_i^3) \end{aligned}$$

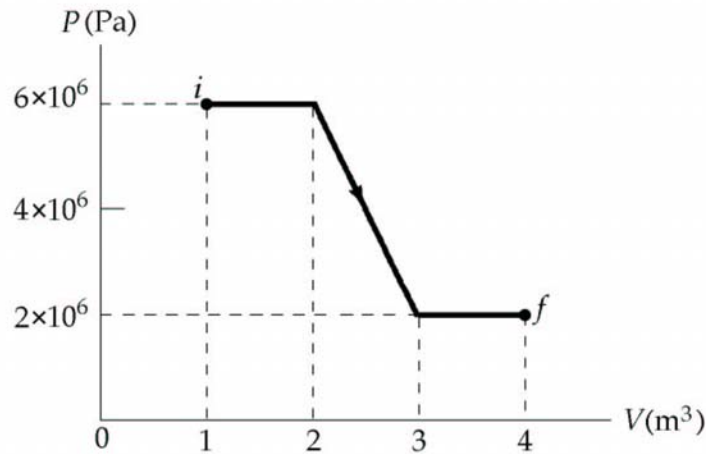


Sapendo che $V_f = 2 V_i = 2(1.00 \text{ m}^3) = 2.00 \text{ m}^3$

$$\begin{aligned} W_{if} &= \frac{1}{3} \alpha (V_f^3 - V_i^3) \\ &= \frac{1}{3} (5.00 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa/m}^6) ((2.00 \text{ m}^3)^3 - (1.00 \text{ m}^3)^3) \\ &= 1.18 \times 10^6 \text{ J} = 1.18 \text{ MJ} \end{aligned}$$

7. Determinare il lavoro compiuto dal un fluido nell'espansione da **i** ad **f** mostrata in figura.

Quanto lavoro è compiuto sul fluido se esso è compresso da **f** ad **i** ?



Idea chiave:

Il lavoro fatto dal gas nell'espansione è pari all'area sottesa dalla curva nel piano pV, valutata fra gli stati iniziale e finale.

Calcolo il lavoro come **somma** delle 3 aree sottese da ciascun segmento della curva spezzata.

$$\begin{aligned}W_{if} &= \int_{V_i}^{V_f} p dV \\&= \int_{V_1}^{V_2} p dV + \int_{V_2}^{V_3} p dV + \int_{V_3}^{V_4} p dV \\&= (6.00 \times 10^6 \text{ Pa})(2.00 - 1.00) \text{ m}^3 + \\&\quad \left(\frac{6.00 \times 10^6 + 2.00 \times 10^6}{2} \text{ Pa} \right) (3.00 - 2.00) \text{ m}^3 + \\&\quad (2.00 \times 10^6 \text{ Pa})(4.00 - 3.00) \text{ m}^3 \\&= 12.0 \times 10^6 \text{ J} = 12.0 \text{ MJ}\end{aligned}$$

Il lavoro compiuto sul fluido nel percorso **f** → **i** è uguale ed opposto:

$$W_{fi} = -\int_{V_i}^{V_f} p dV = -12.0 \text{ MJ}$$

Problemi: I principio Termodinamica

8. Si consideri l'apparecchio di Joule mostrato in figura. Le due masse hanno valore $m_p = 1.50 \text{ kg}$ ciascuna ed il recipiente, termicamente isolato, contiene $m_{\text{water}} = 200 \text{ g}$ di acqua.

Quale è l'aumento di temperatura dell'acqua dopo che le masse sono scese di $h = 3.00 \text{ m}$?

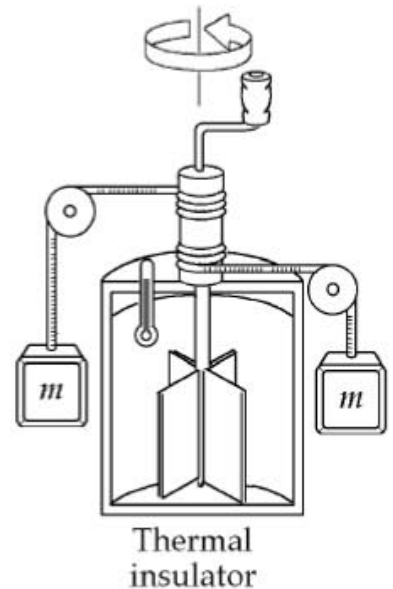
Idea chiave:

Applico il primo principio della termodinamica al sistema termicamente isolato.

$$Q = 0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{acqua}} = 0 + W_{\text{palette}}$$

$$W_{\text{palette}} = W_{\text{pesi}} = \Delta U = 2mgh$$



Infatti il lavoro fatto dai pesi è uguale al lavoro fatto dalle palette sull'acqua. Il lavoro si traduce in un incremento della energia termica dell'acqua.

$$2mgh = \Delta E_{\text{int}} = cm_{\text{acqua}} \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{2mgh}{cm_{\text{acqua}}} = \frac{2 \times 1.50 \text{ kg} (9.8 \text{ m/s}^2) (3.00 \text{ m})}{0.200 \text{ kg} (4186 \text{ J/kg}^\circ\text{C})} = \frac{88.2 \text{ J}}{837 \text{ J/}^\circ\text{C}} = 0.105^\circ\text{C}$$

9. 1 kg di acqua liquida alla temperatura di 100 °C si trasforma in vapore alla stessa temperatura bollendo a pressione atmosferica. Il volume passa da un valore iniziale di 1.00 10⁻³ m³ dal liquido a 1.671 m³ di vapore.

- a) quanto lavoro viene compiuto dal sistema durante questo processo ?
- b) Quanto calore viene fornito al sistema durante il processo ?
- c) quale è la variazione di energia interna del sistema durante il processo di ebollizione ?

Idea chiave:

il sistema compie lavoro positivo in quanto il volume aumenta

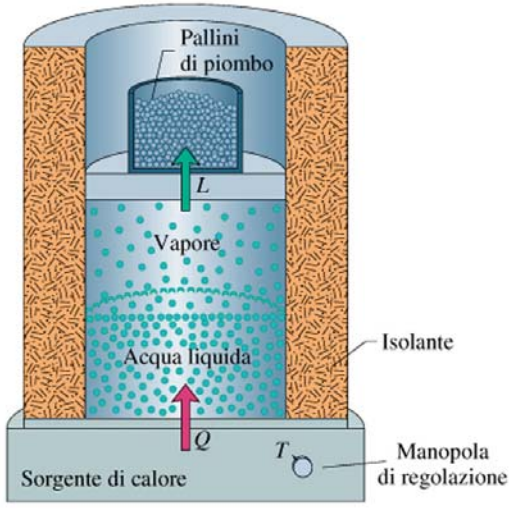
a)
$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV$$

$$= p \int_{V_i}^{V_f} dV$$

$$= p(V_f - V_i)$$

$$= (1.013 \times 10^5 Pa)(1.671 m^3 - 1.00 \cdot 10^{-3} m^3) =$$

$$= 1.69 \times 10^5 J = 169 kJ$$



b) Idea chiave:

La temperatura non cambia, dato che il processo è una transizione di fase:

$$Q = L_v m = (2260 kJ / kg)(1.00 kg) = 2260 kJ$$

c) Idea chiave:

Applico la prima legge della termodinamica:

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2260 kJ - 169 kJ \approx 2090 kJ = 2.09 MJ$$

Ho trovato una variazione di energia positiva: ciò è dovuto al lavoro interno compiuto per vincere le forze attrattive che le molecole di H₂O esercitano fra loro nel liquido.

10. Due moli di elio gassoso, inizialmente a $T_i = 300 \text{ K}$ e pressione $p = 0.400 \text{ atm}$, subiscono una compressione **ISOTERMA** fino alla pressione di **1.20 atm**.

Assumendo che il gas si comporti come un gas perfetto determinare

- il volume finale del gas;
- il lavoro compiuto sul gas;
- l'energia trasferita tramite il calore.

a) Idea chiave:

applico equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

ricordandomi che in una compressione isoterma il prodotto pV è costante

$$p_i V_i = p_f V_f$$

$$V_i = \frac{nRT}{p_i} = \frac{(2.00 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{(0.400 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa})} = 0.123 \text{ m}^3$$

quindi:

$$V_f = \frac{p_i}{p_f} V_i = \frac{0.400 \text{ atm}}{1.20 \text{ atm}} 0.123 \text{ m}^3 = 0.0410 \text{ m}^3$$

b) Il lavoro compiuto sul gas è:

$$W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}}$$

$$= -\int_{V_i}^{V_f} p dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

$$= -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$= -(2.00 \text{ moli})(8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) \ln \frac{0.0410}{0.123} = 5.48 \text{ kJ}$$

c) Dal I principio della termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 = Q - W_{\text{gas}}$$

$$Q = W_{\text{gas}} = -5.48 \text{ J}$$

- 11.** Una mole di gas idrogeno è riscaldata **PRESSIONE COSTANTE** da 300 K a 420 K.
Calcolare:
a) energia trasferita al gas tramite il calore;
b) incremento di energia interna;
c) lavoro svolto sul gas.

Idea chiave:

Poiché la trasformazione è a pressione costante:

$$Q = c_p n \Delta T$$

- a)** Calcolo l'aumento di temperatura:

$$\Delta T = (420 - 300)K = 120K$$

$$Q = c_p n \Delta T = (28.8J / mol \cdot K)(1.00moli)(120K) = 3.46 kJ$$

- b)** In una qualsunque trasformazione vale la relazione:

$$\Delta E_{int} = c_v n \Delta T$$

quindi

$$\Delta E_{int} = (20.4J / mole \cdot K)(1.00moli)(120K) = 2.45 kJ$$

- c)** Dal I principio della termodinamica:

$$\Delta E_{int} = Q - W_{gas}$$

quindi

$$W_{sul\ gas} = -W_{gas} = \Delta E_{int} - Q = 2.45Kj - 3.26kJ = -1.01kJ$$

12. Un campione di **2.00 moli** di gas perfetto con $\gamma = 1.40$ si espande lentamente e **ADIABATICAMENTE** da pressione $p_i = 5.00 \text{ atm}$ e volume $V_i = 12.0 \text{ l}$ a volume finale $V_f = 30.0 \text{ l}$.

- Quale è la pressione finale del gas ?
- Quali sono le temperature finali ed iniziali ?
- Trovare Q , E e ΔE_{int}

[N.B. $1 \text{ litro} = 1 \text{ l} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

Idea chiave:

In una trasformazione adiabatica

$$p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$$

a) Determino la pressione finale del gas:

$$p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = (5.00 \text{ atm}) \left(\frac{12.0 \text{ l}}{30.0 \text{ l}} \right)^{1.40} = 1.39 \text{ atm}$$

b) Determino le temperature utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(5.00 \times 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa})(12.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 365 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(1.39 \times 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa})(30.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{2.00(8.31 \text{ J / mole} \cdot \text{K})} = 253 \text{ K}$$

c) In una qualsiasi trasformazione termodinamica:

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T$$

in questo caso:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{0.40} = 2.5R = \frac{5}{2}R \quad \text{gas biatomico}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = c_V n \Delta T = \frac{5}{2} (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(2.00 \text{ moli})(253 - 365) \text{ K} = -4660 \text{ J}$$

$Q = 0$ **adiabatica**

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W_{\text{gas}} \Rightarrow W_{\text{sul gas}} = -W_{\text{gas}} = \Delta E_{\text{int}} = -4660 \text{ J}$$

è il **gas** che **compie lavoro**
infatti $W_{\text{gas}} > 0$

13. Un campione di gas perfetto monoatomico occupa **5.00 l** a pressione atmosferica e a **300 K** (punto **A** in figura). Esso è riscaldato a volume costante fino a **3.00 atm** (punto **B**). Poi si espande isotermicamente fino a **1.00 atm** (punto **C**) e infine è compresso isobaricamente fino allo stato iniziale.

- Quale è il numero di moli del campione?
- Trovare la temperatura nei punti B e C ed il volume in C
- Assumendo che il calore specifico non dipenda da T ($E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nRT$), trovare l'energia interna nei punti A, B, C.
- Trovare Q, W e ΔE_{int} per le trasformazioni A→B, B→C, C→A;
- trovare Q, W e ΔE_{int} per l'intero ciclo.

[N.B. 1 litro = 1 l = $10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$]

a) Calcolo il numero di moli dalla equazione di stato dei gas perfetti:

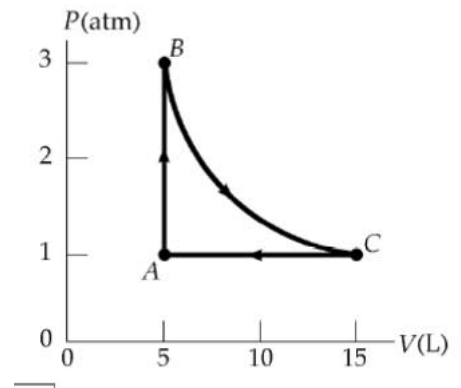
$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(5.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 0.203 \text{ moli}$$

b) Trovo la temperatura:

$$\left. \begin{array}{l} p_A V_A = nRT_A \\ p_B V_B = nRT_B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad \text{A} \rightarrow \text{B} \text{ isocora}$$

$$T_B = \frac{p_B}{p_A} T_A = \frac{3 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} 300 \text{ K} = 900 \text{ K}$$

$$T_C = T_B = 900 \text{ K} \quad \text{B} \rightarrow \text{C} \text{ isoterma}$$



Trovo il volume in C:

$$\left. \begin{array}{l} p_A V_A = nRT_A \\ p_C V_C = nRT_C \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_A}{V_C} = \frac{T_A}{T_C}$$

$$V_C = \frac{T_C}{T_A} V_A = \frac{900 \text{ K}}{300 \text{ K}} 5.00 \text{ l} = 15.0 \text{ l}$$

c) Calcolo le energie interne:

$$E_{\text{int},A} = \frac{3}{2} nRT_A = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{ K}) = 760 \text{ J}$$

$$E_{\text{int},B} = E_{\text{int},C} = \frac{3}{2} nRT_B = \frac{3}{2} (0.203 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K})(900 \text{ K}) = 2.28 \text{ kJ}$$

d) Trovo Q , W e ΔE_{int} nei vari tratti del ciclo:

A→B [isocora]:

$$W=0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},B} - E_{\text{int},A} = (2.28 - 0.760) \text{kJ} = 1.52 \text{kJ}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W \Rightarrow Q = \Delta E_{\text{int}} = 1.52 \text{kJ}$$

B→C [isoterma]:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_B}^{V_C} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \frac{V_C}{V_B} =$$
$$= (0.239 \text{moli})(8.315 \text{J / mole} \cdot \text{K})(300 \text{K}) \ln \frac{15.0 \text{l}}{5.00 \text{l}} = 1.67 \text{kJ}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = 0 + 1.67 \text{kJ}$$

C→A [isobara]:

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},A} - E_{\text{int},C} = (0.760 - 2.28) \text{kJ} = -1.52 \text{kJ}$$

$$W = \int_{V_C}^{V_A} p dV = p \int_{V_C}^{V_A} dV = p(V_A - V_C) = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}(5.00 - 15.00)(10^{-3} \text{m}^3) = -1.013 \text{kJ}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} + W = -1.52 \text{kJ} - 1.01 \text{kJ} = -2.53 \text{kJ}$$

e) Trovo Q , W e ΔE_{int} per l'intero ciclo, sommando i contributi relativi ai vari tratti:

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 = \Delta E_{\text{int},AB} + \Delta E_{\text{int},BC} + \Delta E_{\text{int},CA} = 1.52 \text{kJ} + 0 - 1.52 \text{kJ}$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 0 + 1.67 \text{kJ} - 1.013 \text{kJ} = 0.656 \text{kJ}$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 1.52 \text{kJ} + 1.67 \text{kJ} - 2.53 \text{kJ} = 0.656 \text{kJ}$$

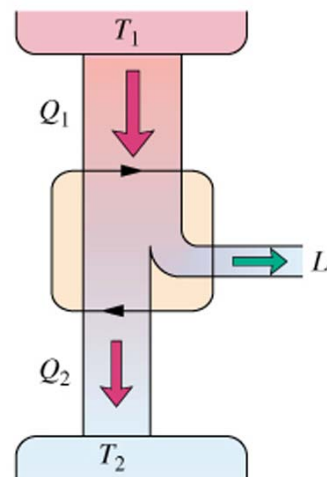
Problemi: Il principio Termodinamica

15. Una macchina di Carnot operi a tra due sorgenti di temperatura $T_1 = 850 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$. Ad ogni ciclo, della durata di 0.25 s , eroga 1200 J di lavoro.

- quale è il rendimento del motore ?
- quale è la potenza media del motore ?
- quanto vale il calore Q_1 fornito dalla sorgente calda durante il ciclo ?
- quanto vale il calore Q_2 ceduto alla sorgente fredda ?

a) In un ciclo di Carnot il rendimento dipende solo dalle temperature:

$$\eta = \frac{L}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$
$$= 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{850 \text{ K}} = 0.647 \approx 65\%$$



b) La potenza è data da L/t

$$P = \frac{L}{t} = \frac{1200 \text{ J}}{0.25 \text{ s}} = 4800 \text{ W} = 4.8 \text{ kW}$$

c) Il rendimento è definito come il rapporto fra il lavoro fatto ed il calore assorbito:

$$\eta = \frac{L}{|Q_1|} \Rightarrow |Q_1| = \frac{L}{\eta} = \frac{1200 \text{ J}}{0.647} = 1855 \text{ J}$$

d) Il lavoro compiuto equivale alla differenza di calore scambiato:

$$L = |Q_1| - |Q_2|$$
$$|Q_2| = |Q_1| - L = 1855 \text{ J} - 1200 \text{ J} = 655 \text{ J}$$

- 16.** Quanto lavoro deve compiere un frigorifero ideale di Carnot per trasformare **0.500 kg** di acqua potabile a **10.0 °C** in ghiaccio a **-20 °C** ?
 Si assuma che lo scomparto del frigorifero sia mantenuto a **-20.0 °C** e che il frigorifero ceda energia a una stanza a **20.0 °C**.

N.B. $c_{\text{acqua}} = 4186 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$
 $L_F = 333 \text{ kJ/kg}$
 $c_{\text{ghiaccio}} = 2090 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$

calore specifico acqua
 calore latente di fusione
 calore specifico ghiaccio

Per trasformare l'acqua in ghiaccio devo seguire 3 stadi:

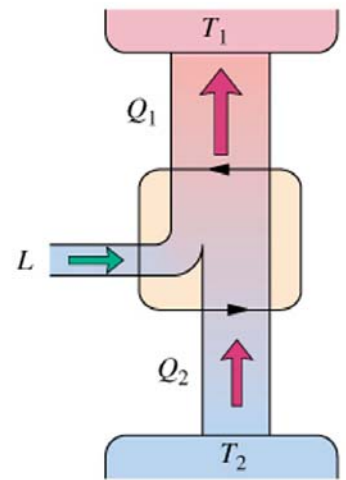
- 1) Raffreddamento acqua a 0°C ;
- 2) Trasformazione in ghiaccio a 0°C ,
- 3) Raffreddamento del ghiaccio a -20°C .

calore che deve essere prelevato da sorgente fredda per trasformare acqua in ghiaccio:

$$\begin{aligned} Q_f &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= mc_{\text{acqua}}\Delta T + mL_F + mc_{\text{ghiaccio}}\Delta T \\ &= (0.500\text{kg})(4186\text{J/kg } ^\circ\text{C})(0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) \\ &\quad - (0.500\text{kg})(333\text{kJ/kg}) \\ &\quad + (0.500\text{kg})(2090\text{J/kg } ^\circ\text{C})(-20^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \\ &= -2.08 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{COP} = \frac{\text{energia estratta}}{\text{lavoro svolto}} = \frac{|Q_f|}{W} = \frac{|Q_f|}{|Q_c| - |Q_f|} = \frac{|T_f|}{|T_c| - |T_f|}$$

$$W = Q_f \frac{|T_c| - |T_f|}{|T_f|} = \frac{(2.08 \times 10^5 \text{ J})(20.0^\circ\text{C} - (-20.0^\circ\text{C}))}{(-20.0 + 273)\text{K}} = 32.9 \text{ kJ}$$



17. Nel 1827 Robert Sterling inventò il “motore a Sterling”, che ha trovato fin da allora numerose applicazioni.

Il carburante viene bruciato esternamente per riscaldare uno dei due cilindri della macchina. Una quantità fissa di gas inerte si muove ciclicamente fra i cilindri, espandendosi in quello caldo e comprimendosi in quello freddo, secondo il ciclo termodinamico rappresentato in figura.

Date n moli di gas perfetto monoatomico che compie un ciclo reversibile fra le isoterme a temperatura $3T_i$ e T_i , e due trasformazioni a volume costante, determinare

- l'energia trasferita tramite il calore al gas, in funzione di n , R e T ;
- il rendimento della macchina.

a) In un processo isotermico

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$$

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

quindi:

$$Q_1 = nR(3T_i) \ln \frac{2V_i}{V_i} = 3nRT_i \ln 2$$

$$Q_3 = nRT_i \ln \frac{V_i}{2V_i} = nRT_i \ln \frac{1}{2}$$

In un processo a volume costante:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = Q = \frac{3}{2} nR\Delta T$$

quindi:

$$Q_2 = \Delta E_{\text{int},2} = \frac{3}{2} nR\Delta T_2 = \frac{3}{2} nR(T_i - 3T_i)$$

$$Q_4 = \Delta E_{\text{int},4} = \frac{3}{2} nR\Delta T_4 = \frac{3}{2} nR(3T_i - T_i)$$

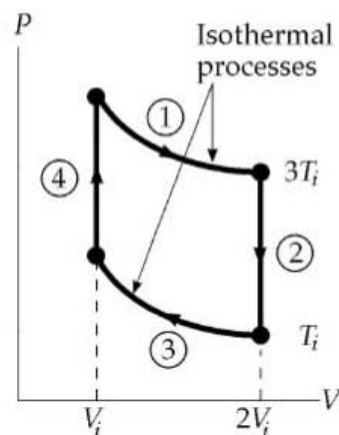
Il calore complessivo trasferito al gas è quindi:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$= 3nRT_i \ln 2 + nRT_i \ln \frac{1}{2} - 3nRT_i + 3nRT_i = 2nRT_i \ln 2$$

b) Il rendimento della macchina è $\eta = L/|Q_c|$ ove $L = Q$ (trasformazione ciclica) e Q_c è la somma dei contributi positivi a Q :

$$\begin{aligned} \eta &= Q/Q_c = Q/(Q_1 + Q_4) = (2nRT_i \ln 2)/(3nRT_i \ln 2 + 3nRT_i) = \\ &= 2 \ln 2 / 3(\ln 2 + 1) = 0.273 = 27.3\% \end{aligned}$$



Problemi: entropia

18. Una mole di azoto si trova confinata nella parte sinistra di un recipiente. Dopo avere aperto il rubinetto il volume del gas raddoppia. Quale è la variazione di entropia per questa trasformazione irreversibile ?

[N.B. Supporre che l'azoto si comporti come un gas ideale]

Idea chiave:

Determino la variazione entropica del processo irreversibile riferendola ad un altro processo reversibile che opera tra gli stessi stati termodinamici.

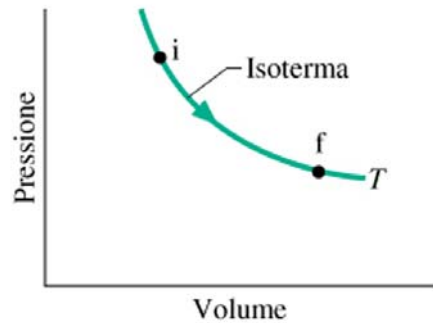
Dato che la temperatura non cambia nell'espansione libera di un gas, utilizzo una **espansione isoterma reversibile**:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$$

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{rev}} &= \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln \frac{V_f}{V_i}}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= (1.00 \text{ moli})(8.315 \text{ J / mole K}) \ln 2 = +5.76 \text{ J / K} \end{aligned}$$



Questa è anche la variazione di entropia per l'espansione libera e per qualunque altra Trasformazione tra i medesimi punti iniziali e finali.

$$\Delta S_{\text{irrev}} = \Delta S_{\text{rev}} = +5.76 \text{ J / K}$$

- 19.** Determinare la variazione di entropia quando **0.30 kg** di piombo fondono a **327 °C**, assumendo per il piombo un calore latente di fusione $L_F = 24.5 \text{ kJ/kg}$.

Idea chiave:

Suppongo che il processo di fusione avvenga così lentamente da poter essere considerato reversibile. In questo caso la temperatura è costante e pari a $T_f = 327 \text{ °C}$.

La quantità di calore richiesta dal processo di fusione è quindi:

$$Q = mL_F$$

a cui corrisponde una variazione di entropia:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T_f} \int dQ_{rev} = \frac{Q}{T_f} = \frac{mL_F}{T_f} \\ &= \frac{(0.30 \text{ kg})(24.5 \times 10^3 \text{ J/kg})}{(327 + 273) \text{ K}} = 12.25 \text{ J/K}\end{aligned}$$

- 20.** Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione di **1.00 atm** e volume **0.025 m³**, viene riscaldata fino allo stato finale che ha pressione di **2.00 atm** e volume **0.040 m³**.
Determinare la variazione di entropia del gas.

In ogni processo termodinamico, ad ogni step infinitesimo posso applicare il I principio:

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW$$

$$dQ = dE_{\text{int}} + dW = nc_V dT + pdV = nc_V dT + nRT \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dQ}{T} = \frac{nc_V dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Se il processo è reversibile:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_i^f \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \\ &= \int_i^f \left(\frac{nc_V dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \right) \\ &= nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \end{aligned}$$

Dalla equazione di stato dei gas perfetti si ha inoltre:

$$\left. \begin{aligned} p_i V_i &= nRT_i \\ p_f V_f &= nRT_f \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_f V_f}{p_i V_i} = \frac{T_f}{T_i}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \Delta S &= nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = n \frac{3}{2} R \ln\left(\frac{p_f V_f}{p_i V_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \\ &= (1.00 \text{ mol}) \frac{3}{2} (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K}) \ln\left(\frac{2.00 \text{ atm} \times 0.040 \text{ m}^3}{1.00 \text{ atm} \times 0.025 \text{ m}^3}\right) \\ &\quad + (1.00 \text{ mol}) (8.315 \text{ J / mole} \cdot \text{K}) \ln\left(\frac{0.040 \text{ m}^3}{0.025 \text{ m}^3}\right) \\ &= 18.4 \text{ J / K} \end{aligned}$$